Online Algorithmen

Proseminar von
Prof. Dr. Rolf Klein, Dr. Elmar Langetepe,
Diplom Inform. Thomas Kamphans
im Wintersemester 00/01

Vortrag Das Brückenproblem
von Rainer Montignies

10 Januar 2001

Inhalt des Vortrags:

1. Vorstellung des Problems
2. Diskretisierung jeder Strategie
3. Nicht jede Strategie ist kompetitiv
4. Die Verdopplungsstrategie ist 9-kompetitiv
5. Der Faktor 9 ist optimal

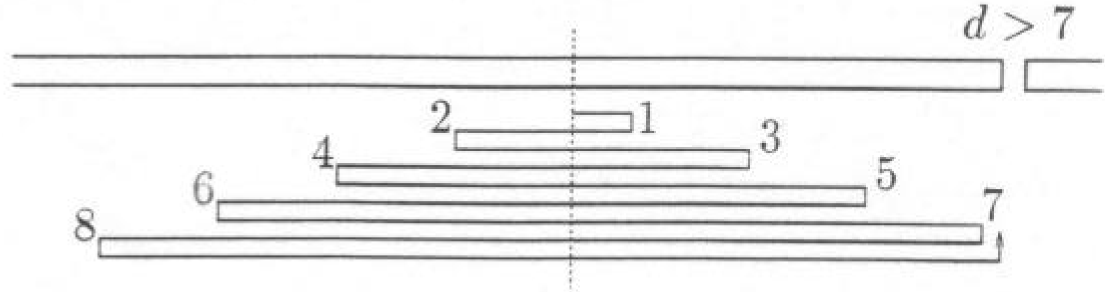
1.Vorstellung des Problems:

Wir stehen in absoluter Dunkelheit an einem Fluß und wollen diesen an einer Brücke überqueren, wir wissen jedoch nicht, wo sich die nächste Brücke befindet und da es absolut dunkel ist können wir auch nicht sehen, wo sich die nächste Brücke befindet. Gesucht ist eine Strategie, die die nächste Brücke am schnellsten bzw. mit dem geringsten Umweg findet. Angewendet werden solche Strategien in der Robotik, wo zum Beispiel ein Roboter mit einem Tastsensor vor einer Wand steht und die nächste Tür sucht.

2. Diskretisierung jeder Strategie:

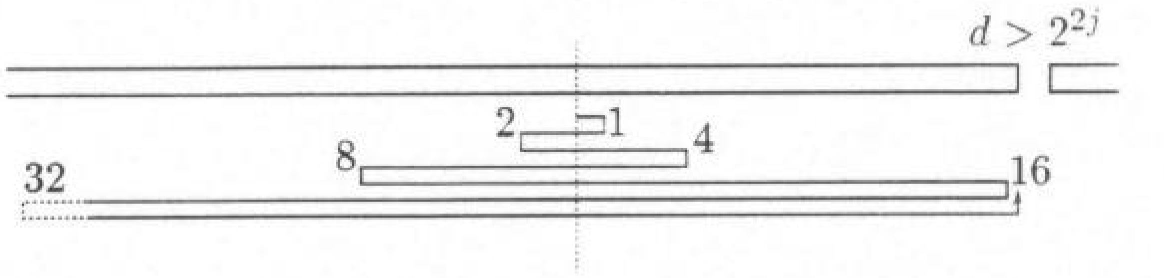
1. „Raten“:
Der Roboter sucht sich eine Richtung aus und läuft dann immer in diese Richtung. Hat er die richtige Richtung gewählt, löst er das Problem, sonst nicht. Da wir an Strategien interessiert sind, die immer funktionieren, ist diese Strategie ungeeignet.

2. Strategie mit Richtungswechsel:
Der Roboter geht vom seinem Startpunkt aus einen Meter nach rechts kehrt zu seinem Startpunkt zurück und geht zwei Meter nach links und kehrt wieder zu seinem Startpunkt zurück, usw. Nach jedem Richtungswechsel wird die Suchtiefe um eine Einheit erhöht. Der Roboter stoppt, sobald er die Tür erreicht hat.



3. Verdopplungsstrategie:

Die Verdopplungsstrategie funktioniert wie die zweite Strategie, nur mit dem Unterschied, dass die Suchtiefe nach jedem Richtungswechsel doppelt wird. Diese Strategie ist effizienter als die ersten beiden Strategie, da das Ziel schneller erreicht wird.



3. Nicht jede Strategie ist kompetitv:

Ich führe den Beweis am Beispiel der zweiten Strategie.
Wir gehen vom schlimmsten Fall aus: der Roboter verfehlt die Tür knapp.
l = ganze Zahl; aktuelle Suchtiefe
ε>0 ; Länge, um die Tür verfehlt wird
d = l + ε ; Entfernung vom Startpunkt zur Tür
Der Roboter läuft l Meter nach rechts, verfehlt die Tür knapp , kehrt zum Startpunkt zurück und erreicht beim übernächsten Versuch nach l + ε Metern die Tür.

Wir betrachten nun die Weglänge:

$$1 + 1 + 2 + 2 + \ldots + l + l + (l+1) + (l+1) + l + \varepsilon$$

$$= 2 \sum_{i=1}^{l+1} i + l + \varepsilon$$

$$= 2 (l + 1) (l + 1 + 1) /2 + l + \varepsilon$$

$$= (l + 1) (l + 2) + l + \varepsilon$$

$$\in \theta (d^2)$$

$\Rightarrow$ die Strategie ist nicht kompetitiv

Beispiel:
Der Startpunkt ist 100m von der Tür entfernt. Der Algorithmus benötigt 10 km.

4. Die Verdopplungsstrategie ist 9 – kompetitiv

Wir gehen hier wieder den schlimmsten Fall aus:
der Roboter verfehlt die Tür knapp.
Die Entfernung zur Tür ist $2^{2j}+\varepsilon$.
Wir betrachten nun wieder die Weglänge:

$$1+1+2+2+...+2^{2j}+2^{2j}+2^{2j+1}+2^{2j+1}+2^{2j}+\varepsilon$$

$$= 2 \sum_{i=0}^{2j+1} 2^{i} + 2^{2j} +\varepsilon$$

$$= 2((1-2^{2j}+1)/(1-2))+ 2^{2j}+\varepsilon$$

$$= 2(2^{2j}-1-1)+ 2^{2j} +\varepsilon$$

$$= 9\cdot 2^{2j} -2 + \varepsilon$$

$$< 9d$$

Spezialfall: $d= \varepsilon\leq 2$

Weg des Roboters:
$1+1+ \varepsilon < 9\varepsilon+2= 9d+2$ q.e.d.

1. Der Faktor 9 ist optimal:

Beh.: Jede kompetitive Strategie zum Auffinden eines Punktes auf einer Geraden hat einen Faktor ≥ 9.

S kompetitive Strategie mit Richtungswechsel
f_i Folge von Erkundungsweiten
s Startpunkt

S kompetitiv

$$\Rightarrow 2 \sum_{i=1}^{n+1} f_i +f_{i} +\varepsilon \leq C (f_n +\varepsilon)$$

Annahme: $\varepsilon =0$

$$\Leftrightarrow 2 \sum_{i=1}^{n+1} f_i +f_n \leq C f_n$$

$$\Leftrightarrow 2 \sum_{i=1}^{n-1} f_i +f_n +2 f_n +2f_{n+1}\leq C f_n$$

$$\Leftrightarrow 2 \sum_{i=1}^{n-1} f_i +2f_{n+1}\leq C f_n+3 f_n$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i + 2f_{n+1} \le f_n(C-3)$$

$$\Leftrightarrow f_{n+1} \le f_n(C-3)/2 + \sum_{i=1}^{n-1} f_i = f_n H - \sum_{i=1}^{n-1} f_i \quad \text{mit } H=(C-3)/2$$

In die Gleichung $f_{n+1} \le f_n H - \sum_{i=1}^{n-1} f_i$ setzen wir die ebenfalls gültige Gleichung $f_n \le f_{n-1} H - \sum_{i=1}^{n-2} f_i$ ein:

$$f_{n+1} \le \left(f_{n-1} H - \sum_{i=1}^{n-2} f_i \right) H - \sum_{i=1}^{n-1} f_i$$

$$= H^2 f_{n-1} - H\sum_{i=1}^{n-2} f_i - \sum_{i=1}^{n-1} f_i - f_{n-1}$$

$$= (H^2 - 1) f_{n-1} + (H+1) \sum_{i=1}^{n-2} f_i$$

Dieser Ersetzungsvorgang lässt sich iterieren:
Zahlenfolgen: (a_n) (b_n)

$a_0=H$ $\quad a_{i+1}=a_i H - b$
$b_0=1$ $\quad b_{i+1}=a_i+b_i$

Beh.: Für alle $n\ge1$ und für alle $0\le m\le n-1$ gilt:

$$f_{n+1} \le a_m f_{n-m} - b_m \sum_{i=1}^{n-1-m} f_i$$

Beweis:

n fest
Induktion über m

Induktionsanfang: $m=0$

$$f_{n+1} \le a_0 f_n - b_0 \sum_{i=1}^{n-1} f_i$$

$$= Hf_n - \sum_{i=1}^{n-1} f_i$$

Induktionsschritt: $m \rightarrow m+1$

$$f_{n+1} \leq a_m H f_{n-m-1} - a_m \sum_{i=1}^{n-m-2} f_i - b_m \sum_{i=1}^{n-1-m} f_i$$

$$= a_m H f_{n-m-1} - a_m \sum_{i=1}^{n-m-2} f_i - b_m \sum_{i=1}^{n-m-2} f_i - b_m f_{n-1-m}$$

$$= (a_m H - b_m)\, f_{n-1-m} - (a_m + b_m) \sum_{i=1}^{n-m-2} f_i$$

$$= a_{m+1} f_{n-m-1} - b_{m+1} \sum_{i=1}^{n-1-m-1} f_i$$

Lemma 1: Die Zahlen a_i sind positiv.

Beweis:

Sei $i \geq 0$ beliebig.
Annahme: $a_i \leq 0$

Dann folgt für m=i und n=i+1:
$f_{i+2} \leq a_i f_1 - b_i \cdot 0 \leq 0$
Widerspruch, da die Erkundungstiefen positiv sind.

Lemma 2:
Sei $H \neq 3$, dann gilt für die Zahlen a_i und b_i, für alle $i \geq 0$ die Darstellung:

$$a_i = v\, z^i + \bar{v}\, \bar{z}^i$$

$$b_i = v\,(z-1)\, z^i + v\,(z-1)\, z^i$$

mit $v = (H\, z - H - 1) / \, z - \bar{z})$

und $\bar{v} = (H\, \bar{z} - H - 1)/(\, z - \bar{z})$

Zunächst eine kurze Wiederholung:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$\chi(t) = \det(tE - M)$ Charakteristische Polynom

Eigenwerte sind die Nullstellen des Charakteristischen Polynoms

Eigenvektor : $MV=zV$

Beweis:

Zunächst schreibe ich die rekursiv definierten Zahlenfolgen a_n und b_n als Iterierte Matrizenmultiplikation hin.

$$\begin{pmatrix} a_{i+1} \\ b_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} H & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{i+1} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

Jetzt stellen wir die Anfangswerte a_0 und b_0 als Linearkombination von zwei Eigenvektoren V_1 und V_2 der Multiplikationsmatrix M dar.

$$M = \begin{pmatrix} H & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wenn $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = v_1 V_1 + v_2 V_2$ gilt und z_1 und z_2 die Eigenwerte der Eigenvektoren

V_1 V_2 von M.

$\Rightarrow MV_j=z_jV_j$ und $M^iV_j=z^i_j V_j$ für j=1,2 so folgt

$$\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} = M^i \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = M^i(v_1V_1+v_2V_2) = v_1 M^i V_1 + v_2 M^i V_2 = v_1 z^i V_1 + v_2 z^i V_2$$

Die geschlossene Darstellung ergibt sich durch den Vergleich der Vektor-koordinaten. M hat das Charakteristische Polynom

$$\det(tE-M) = \begin{pmatrix} t-H & 1 \\ -1 & t-1 \end{pmatrix} = t^2-(H+1)t+H+1$$

Die Eigenwerte sind die Nullstellen der Charakteristischen Polynoms.

$$z, \bar{z} = 0{,}5(H+1 \pm \sqrt{(H+1)(H-3)}$$

Durch das Lösen eines linearen Gleichungssystems ergeben sich die zugehörenden Eigenvektoren.

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{z}-1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \bar{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ z-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{Hz - H - 1}{z - \bar{z}} \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{z}-1 \end{pmatrix} + \frac{H\bar{z} - H - 1}{\bar{z} - z} \begin{pmatrix} 1 \\ z-1 \end{pmatrix}$$

$$= vV + \overline{vV}$$

Die Behauptung folgt durch Einsetzen sofort.

Beh.: Der Faktor 9 ist optimal

Beweis:

Annahme: $C<9$

$\Rightarrow H<3$

$\Rightarrow$ nach Lemma 2 ist die Zahl a komplex

$\Rightarrow a_n=vz^n+ vz^n=2Re(vz)$

Wir stellen uns die komplexe Zahl $W=c+di$ als Ortsvektor 0w des Punktes $w=(c,d)$ im R^2 vor. Nun betrachten wir die komplexe Multiplikation geometrisch: die Winkel der positiven Achse addieren sich, die Längen werden multipliziert. Am leichtesten sieht man das an der Darstellung der Polarkoordinaten..

$v=r \cos \phi+ir\sin\phi$

$z=s \cos\varphi+id\sin\varphi$ mit $r,s>0$

vz

$=rs(\cos\phi\cos\phi-\sin\varphi\sin\varphi)+irs(\cos\phi\sin\varphi-\sin\phi\cos\varphi)$

$=rs \cos(\varphi+\phi)+irs \sin(\phi+\varphi)$

z hat einen Winkel $\varphi>0$, weil sie nicht reell ist. Bei jeder Mutliplikation mit z wird der Winkel vz^n um φ größer. Hieraus folgt, dass vz^n in der linken Halbebene liegt. $a_n=2Re(vz)<0$ Dies widerspricht Lemma 1.

$\Rightarrow C>9$