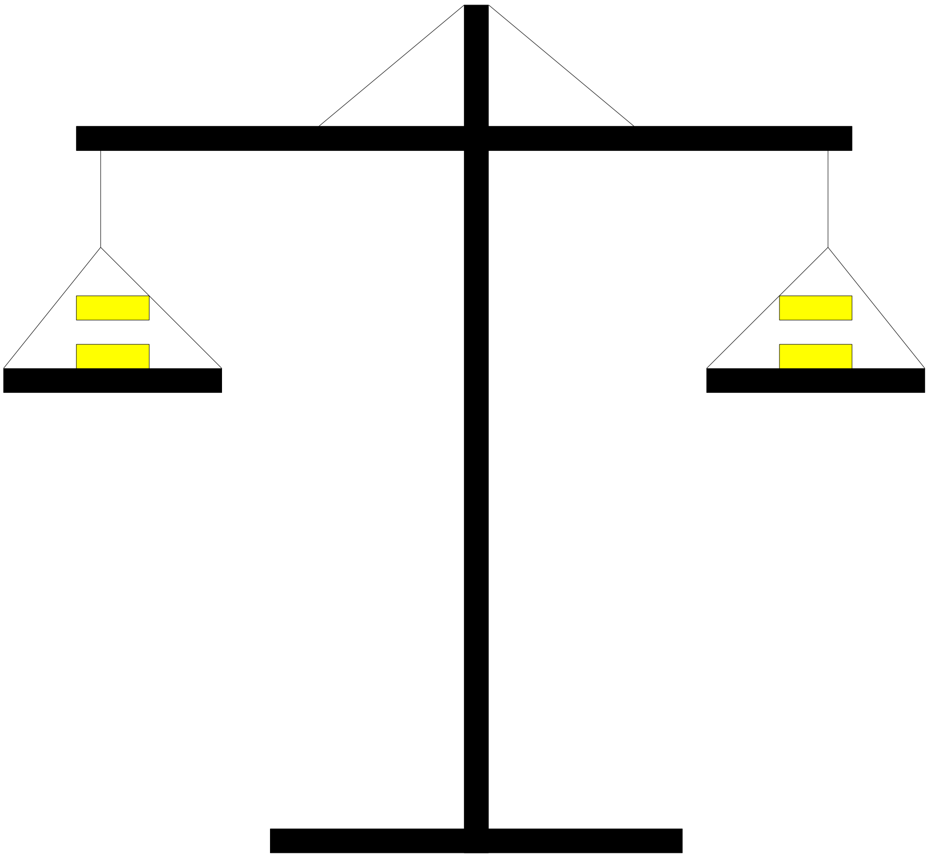
von **Thomas Trimborn** **Proseminar „Achilles und die Schildkröte“**

Wiegeprobleme



Das 12-Münzen-Problem oder **The counterfeit coin problem**
mit seiner praktischen Lösung und der optimalen allgemeinen Lösung,
in der Zusammenfassung.

Das 12-Münzen-Problem

Das-12 Münzen-Problem findet man in diversen Abwandlungen an vielen Stellen in Büchern, auf Rätselseiten und im Internet. Es besteht darin, aus 12 gegebenen Münzen gleichen Aussehens die eine zu finden die eine Fälschung ist. Die Fälschung ist allein durch ein abweichendes Gewicht zu identifizieren, wobei man nicht weiß, ob die falsche Münze schwerer oder leichter als die Original-Münzen ist. Als Hilfsmittel ist ausschließlich eine althergebrachte Balkenwaage zugelassen und die Anzahl der Wägungen ist auf 3 beschränkt. Hier wird nur die allgemeine Lösung für n Münzen mit k Wägungen vorgestellt, in das nur die entsprechenden Werte eingesetzt werden müssen um die genaue Lösung für 12 Münzen zu erhalten.

Die Lösung:

Die Münzen, von denen man nicht weiß, ob sie eine echte oder eine falsche Münze sind, werden hier als „unbekannt“ bezeichnet, die von denen man weiß, das sie nur noch echt oder leichter/schwerer sein können werden als möglicherweise leichter/schwerer benannt.
Teilt man die n Münzen zunächst in 3 Haufen mit je $\frac{3^{k-1}-1}{2}$ Münzen auf und wiegt davon 2 Gruppen gegeneinander, so ergeben sie wieder 3 verschiedene Ausgänge der Wägung. Lassen sich die n Münzen nicht gleichmäßig wie oben angegeben aufteilen, so sind zwei Gruppen wie angegeben und eine mit weniger Münzen zu bilden.

-gleich schwer: (i)

Es bleiben $\frac{3^{k-1}-1}{2}$ Münzen die jeweils schwerer oder Leichter sein können.
Von diesen wiegt man $\frac{3^{k-2}+1}{2}$ unbekannte gegen $\frac{3^{k-2}-1}{2}$ unbekannte und 1 echte Münze, was wiederum 3 Ausgänge zulässt:

-gleich schwer:

Es sind noch $\frac{3^{k-1}-1}{2}-\frac{3^{k-2}-1}{2}-\frac{3^{k-2}+1}{2}=\frac{3^{k-2}-1}{2}$ Münzen über, die entweder leichter oder schwerer sein können, da dies (i) für k:=k-1 entspricht macht man dort weiter.

-rechts schwerer:

Es bleiben $\frac{3^{k-2}+1}{2}$ mögl. leichtere und $\frac{3^{k-2}-1}{2}$ mögl. schwerere Münzen übrig, die in (iii) weiter behandelt werden.

-links schwerer:

Es bleiben $\frac{3^{k-2}+1}{2}$ mögl. schwerere und $\frac{3^{k-2}-1}{2}$ mögl. leichtere Münzen übrig, die in (iii) weiter behandelt werden.

-links schwerer: (ii)

Es bleiben $\frac{3^{k-1}-1}{2}$ Münzen die leichter, und $\frac{3^{k-1}-1}{2}$ Münzen die schwerer sein können.
Davon wiegt man $\frac{3^{k-2}+1}{2}$ mögl. schwerere und $\frac{3^{k-2}-1}{2}$ mögl. leichtere Münzen gegen $\frac{3^{k-2}-1}{2}$ mögl. schwerere, $\frac{3^{k-2}-1}{2}$ mögl. leichtere und 1 echte Münze. Ist k=2, so wird die Falschmünze mit der nächsten Wägung gefunden. Auch hier gibt es 3 mögliche Ergebnisse:

-gleich schwer:

Es bleiben $\frac{3^{k-2}-1}{2}$ mögl. schwerere und $\frac{3^{k-2}+1}{2}$ mögl. leichtere Münzen, die in (iii) weiter behandelt werden. Bei k=2 ist die nicht gewogene die leichtere Falschmünze.

-links schwerer:

Es bleiben $\frac{3^{k-2}+1}{2}$ mögl. schwerere und $\frac{3^{k-2}-1}{2}$ mögl. leichtere Münzen, die in (iii) weiter behandelt werden. Bei k=2 ist die linke die schwerere Falschmünze.

-rechts schwerer:

Geblieben sind $\frac{3^{k-2}-1}{2}$ mögl. schwerere und $\frac{3^{k-2}-1}{2}$ mögl. leichtere Münzen, was den Voraussetzungen von (ii) für k:=k-1 entspricht, weshalb dort weiter gemacht wird.

-rechts schwerer:

Dies entspricht genau (ii) mit verdrehtem leichter und schwerer.

-allgemeine Fortsetzung: (iii)

Es bleiben noch $\frac{3^{k-2}-1}{2}$ mögl. leichtere (schwerere) und $\frac{3^{k-2}+1}{2}$ mögl. schwerere (leichtere) Münzen, von denen Münzen wie folgt weiter gewogen werden:

$\frac{3^{k-3}+1}{2}$ mögl. schwerere (leichtere) und $\frac{3^{k-3}+1}{2}$ mögl. leichtere (schwerere) Münzen gegen $\frac{3^{k-3}-1}{2}$ mögl. schwerere (leichtere), $\frac{3^{k-3}-1}{2}$ mögl. leichtere (schwerere) und 2 echte Münzen

Für k=3 findet man die gesuchte Münze und deren Gewichtsabweichung mit der nächsten Wägung. Dies ergibt 3 verschiedene Ausgänge der Wägung:

-gleich schwer:

Es bleiben $\frac{3^{k-3}+1}{2}$ mögl. schwerere (leichtere) und $\frac{3^{k-3}-1}{2}$ mögl. leichtere (schwerere) Münzen, was den Voraussetzungen von (iii) für k:=k-1 entspricht. Bei k=3 ist die leichtere (schwerere) die nicht gewogene Münze.

-links schwerer:

Es bleiben $\frac{3^{k-3}+1}{2}$ mögl. schwerere (leichtere) und $\frac{3^{k-3}-1}{2}$ mögl. leichtere (schwerere) Münzen, was den Voraussetzungen von (iii) für k:=k-1 entspricht. Bei k=3 ist die gewogene schwerere (leichtere) die gesuchte Münze.

-rechts schwerer:

Es bleiben $\frac{3^{k-3}+1}{2}$ mögl. leichtere (schwerere) und $\frac{3^{k-3}-1}{2}$ bögl. schwerere (leichtere) Münzen, was den Voraussetzungen von (iii) für k:=k-1 entspricht. Bei k=3 ist die gewogene leichtere (schwerere) die gesuchte Münze.

Verfolgt man diesen Lösungsweg bis die Rekursion endet findet man immer die falsche Münze und kann eindeutig bestimmen ob die leichter oder schwerer ist als die echten Münzen.

Optimalität der Lösung

Das dieser Lösungsweg der optimale Weg ist, wird bewiesen, indem gezeigt wird, dass $n \leq \frac{3^k-3}{2}$ die untere Schranke für die möglichen nötigen Lösungsschritte ist.

Beweis

Zuerst wird gezeigt, dass für die nötige Wägungszahl k und die Münzzahl n die Beziehung $n \leq \frac{3^k-3}{2}$ gilt.

Man hat bei n Münzen 2n Möglichkeiten, da von n Münzen genau eine ein anderes Gewicht hat und sich bei jeder Wägung 3 Verzweigungen am Lösungsbaum auftun, muss gelten: $2\mathrm{n} \leq 3^k$.

Da aber 3^k kein vielfaches von 2n ist, muss auch gelten: $2\mathrm{n} \leq 3^k - 1$.

Mit der ersten Wägung vergleicht man nun 2i Münzen.

Bleibt die Waage dabei nicht im Gleichgewicht, bleiben noch i möglicherweise zu leichte und i möglicherweise zu schwere Münzen, weshalb gelten muss: $2\mathrm{i} \leq 3^{k-1} - 1$. Bleibt die Waage aber im Gleichgewicht, so folgt, dass unter den verbliebenen n-2i Münzen mit k-1 Wägungen die richtige gefunden werden kann, weshalb gilt: $2(n-2i) \leq 3^{k-1} - 1$. Daraus folgt:

$2n-4i \leq 3^{k-1}-1 \Leftrightarrow 2n \leq 3^{k-1}-1-4i \Leftrightarrow 2n-3^{k-1}+1 \leq 4i$, woraus direkt folgt, dass gilt:
$2n-3^{k-1}+1 \leq 4i \leq 2*3^{k-1}-2 \Rightarrow 2n-3^{k-1}+1 \leq 2*3^{k-1}-2$, was wiederum zu
$2n-3^{k-1}+1 \leq 2*3^{k-1}-2 \Leftrightarrow 2n \leq 3^{k-1}+2*3^{k-1}-2-1 \Leftrightarrow 2n \leq 3^k-3 \Leftrightarrow n \leq \frac{3^k-3}{2}$ führt.

❑

Somit ist gezeigt, dass man das n-Münzen-Problem immer mit $k \geq \log_3(2\mathrm{n}+3)$ Wägungen mit dem oben vorgestellten Verfahren lösen kann und dass dieses Verfahren das optimale ist.