

RHEINISCHE FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT BONN  
INSTITUT FÜR INFORMATIK I



---

**Raja Mehlem**

**Die Komplexität der  
Minkowski-Summe  
konvexer Polyeder**

**1. Dezember 2007**

---

Seminararbeit im WS 2007/2008



## Zusammenfassung

Dieser Text beschäftigt sich mit der Komplexität der Minkowski-Summe zweier konvexer Polyeder im  $\mathbb{R}^3$ . Er ist angelehnt an eine Arbeit von Efi Fogel, Dan Halperin und Christophe Weibel (siehe [1]). Zunächst wird eine obere Schranke  $f(m, n) = 4mn - 9m - 9n + 26$  für die Komplexität der Minkowski-Summe zweier konvexer Polyeder  $P$  und  $Q$  mit je  $m$  und  $n$  Facetten hergeleitet. Anschliessend wird gezeigt, dass dies auch eine untere Schranke bei gegebenen Parametern  $m$  und  $n$  darstellt, und somit die genaue Komplexität  $\Theta(f(m, n))$  festgelegt. Hierzu wird eine Konstruktionsanleitung geliefert, wie man - gegebenen  $m$  und  $n$  - zwei Polyeder erzeugen kann, deren Minkowski-Summe maximale Komplexität besitzt.

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Eine obere Schranke</b>	<b>2</b>
2.1	Die Gauß'sche Abbildung und ihre Eigenschaften . . . . .	3
2.2	Die Überlagerung von Gauß'schen Abbildungen . . . . .	6
2.3	Herleitung einer oberen Schranke . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Eine untere Schranke</b>	<b>12</b>
3.1	Konstruktion von $P_4$ . . . . .	13
3.2	Konstruktion von $P_5$ . . . . .	14
3.3	Konstruktion von $P_i, i \geq 5$ . . . . .	17
3.3.1	Platzieren der Knoten . . . . .	17
3.3.2	Flächen und Kanten . . . . .	18
3.3.3	Winkel . . . . .	19

# 1 Einführung

Die Minkowski-Summe ist ein geometrisches Konzept, welches in vielen Bereichen der algorithmischen Geometrie auftaucht. Hier zunächst die allgemeine Definition:

## Definition 1

Seien  $P, Q \in \mathbb{R}^d$  Mengen. Dann ist die Minkowski-Summe  $P \oplus Q$  definiert als:

$$P \oplus Q = \{p + q | p \in P, q \in Q\}. \quad (1)$$

$P$  und  $Q$  sind typischerweise Mengen im  $\mathbb{R}^2$  (z.Bsp. Polygone) oder im  $\mathbb{R}^3$  (z.Bsp. Polyeder), wobei effiziente Algorithmen zur Berechnung der Minkowski-Summe (vor allem in 3D) ein aktuelles Forschungsgebiet sind. Ein Ansatz ist zum Beispiel die punkt-basierte Berechnung der Minkowski-Summe, um die Komplexität des Problems zu reduzieren - allerdings auf Kosten der Genauigkeit. Der Vorteil eines solchen Verfahrens liegt unter anderem in der parallellisierbarkeit, für weitere Informationen siehe [3].

Ein Beispiel für die Anwendung der Minkowski-Summe ist das Morphen von einem konvexen Polyeder  $S$  in ein anderes konvexes Polyeder  $T$ . Hier erhält man das Zwischenergebnis  $P(t)$  für  $t \in [0, 1]$  über die Formel  $P(t) = (1 - t) \cdot S \oplus t \cdot T$ , wobei  $t \cdot T$  bedeutet, dass jeder Punkt (auch innere Punkte) von  $T$  mit  $t$  skaliert wird.

Ein weiteres Beispiel ist die Bahnplanung eines konvexen, nicht rotierbaren Roboters in einer Szene mit polygonalen Hindernissen. Um hier den Raum aller möglichen freien Platzierungen des Roboters zu errechnen, bestimmt man die Minkowski-Summe der Hindernisse und des um  $180^\circ$  gedrehten Roboters. In diesem sog. Konfigurationsraum kann man den Roboter an Hand seines Referenzpunktes frei transformieren, und so einen Pfad von  $s$  nach  $t$  bestimmen.

## 2 Eine obere Schranke

Die Komplexität der Minkowski-Summe zweier konvexer Polyeder kann auf verschiedene Weise betrachtet werden - zum Beispiel als die Anzahl der Knoten oder die Anzahl der Facetten. Im Folgenden soll die Anzahl der Facetten als Maß für die Komplexität dienen, und für diese eine obere Schranke hergeleitet werden.

Hierzu seien ab jetzt  $P$  und  $Q$  konvexe Polyeder und  $m$  bzw.  $n$  die Anzahl der Facetten der Polyeder.

Betrachtet man zum Beispiel eine vierseitige Pyramide (Tetraeder) als  $P$  und einen Quader als  $Q$ , so erhält man bei  $m = 4$  und  $n = 6$  in der Minkowski-Summe möglicherweise  $s = 13$  Facetten (siehe Abb. 1).

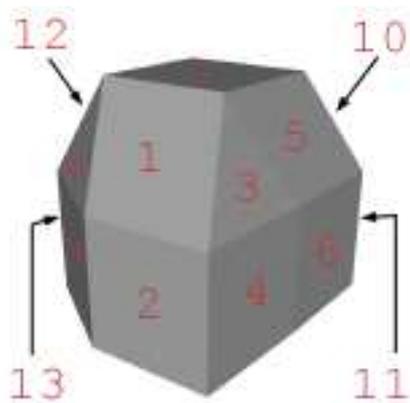


Abbildung 1: Minkowski-Summe eines Tetraeders und eines Quaders

Andererseits kann es auch sein, dass die Anzahl der Facetten geringer ist, zum Beispiel wenn man zwei identische Objekte addiert, die genau gleich ausgerichtet sind. Dann ist die Komplexität der Minkowski-Summe die Komplexität eines einzelnen Objekts. Dieser Fall soll uns hier allerdings nicht interessieren, da wir über die maximale Komplexität bei zwei gegebenen Objekten sprechen. Um eine genaue obere Schranke zu bekommen, benötigen wir zunächst das Konzept der Gauß'schen Abbildung.

## 2.1 Die Gauß'sche Abbildung und ihre Eigenschaften

**Definition 2** Die Gauß'sche Abbildung  $G(P)$  eines kompakten, konvexen Polyeders  $P$  im euklidischen  $\mathbb{R}^3$  ist eine Abbildung von  $P$  auf die Einheitskugel  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^2 + y^2 + z^2) = 1\}$ , welche jedem Punkt  $p$  die Menge der von  $p$  ausgehenden, äußeren Einheitsnormalen zu allen möglichen Stützebenen an  $p$  bzgl.  $P$  zuordnet. Bei mehreren parallelen Normalen wird stets diejenige Einheitsnormale gewählt, deren Verlängerung durch den Ursprung der Einheitskugel läuft.

Somit entsteht jeder Punkt des Bildes aus dem Schnitt einer Einheitsnormalen auf der Oberfläche von  $P$ , parallel verschoben in den Ursprung der Einheitskugel  $S^2$ , mit der Oberfläche der Einheitskugel. Die Gauß'sche Abbildung einer Ebene wäre also ein Punkt auf  $S^2$ , dessen Position nur von der Orientierung der Ebene abhängt, da alle Normalen der Ebene parallel sind und dementsprechend als Repräsentant diejenige gewählt wird, deren Verlängerung im Ursprung der Einheitskugel entspringt.

Als weiteres Beispiel sei hier noch ein Zylinder angeführt, bei dem die Oberfläche gekrümmt ist, und somit unendlich viele nicht-parallele Einheitsnormalen entstehen. Die parallelen Einheitsnormalen (alle, die auf einer Linie  $l$  liegen, siehe Abb. 2) werden wieder durch diejenige repräsentiert, deren

Verlängerung aus dem Ursprung der Einheitskugel entspringt. So entsteht ein Kreis in der Gauß'schen Abbildung.

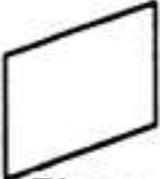
Oberfläche	Gauß'sche Abb.
 <p><b>Ebene</b></p>	 <p><b>Punkt</b></p>
 <p><b>Zylinder</b></p>	 <p><b>Kreis</b></p>

Abbildung 2: Beispiele: Gauß'sche Abbildungen

Direkt aus der Definition folgt, dass die Gauß'sche Abbildung zu einer Oberfläche bzw. einem Polyeder invariant ist unter Skalierung, da diese die Einheitsnormalen nicht verändert. Eine Rotation des Polyeders führt zu einer Drehung aller Einheitsnormalen um den Rotationswinkel, somit bleibt die Gauß'sche Abbildung strukturell gleich, sie ist nur im selben Winkel rotiert wie das Urbild. Nebenbei bemerkt ist die Gauß'sche Abbildung nicht injektiv (es gibt Polyeder  $P, Q$  die das gleiche Bild haben, z.Bsp. ein Quader und ein weiterer der doppelt so breit ist) und somit auch nicht bijektiv.

Weiterhin stellen wir fest, dass die Bilder der Gauß'schen Abbildung als Abbildung auf eine Einheitskugel die Euler-Formel erfüllen. Der Grund liegt im Geschlecht der Kugeloberfläche - dieses ist 0, da die Kugeloberfläche keine Henkel bzw. Löcher aufweist. Somit gelten hier alle Beobachtungen, die auch für planare Graphen gelten.

Bezogen auf konvexe Polyeder bedeutet die Gauß'sche Abbildung also, dass Facetten von  $P$  auf einzelne Punkte abgebildet werden, die eine Repräsentation der Menge der Einheitsnormalen zu der Facette darstellen - es entstehen also so viele Eckpunkte in  $G(P)$ , wie  $P$  Facetten hat (siehe Abb. 3).

Des Weiteren werden Kanten von  $P$  in  $G(P)$  zu geodätischen Segmenten auf der Einheitskugel. Die Länge eines solchen Segments entspricht dem äußeren Öffnungswinkel an der Kante von  $P$ , da die Kante stets von zwei Flächen begrenzt wird, deren Winkel zu einander die Menge der möglichen

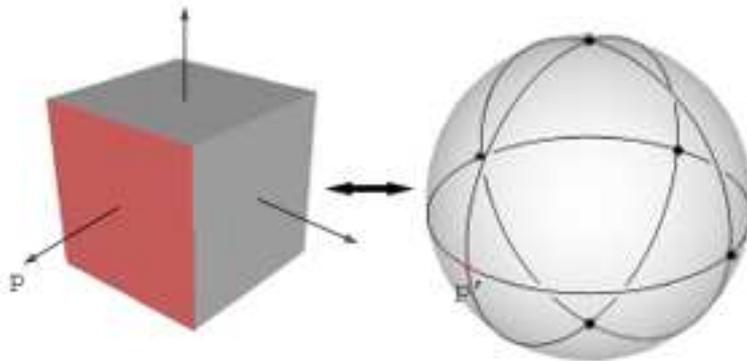


Abbildung 3: Flächen von  $P$  in  $G(P)$

Stützebenen einschränkt (siehe Abb. 4).

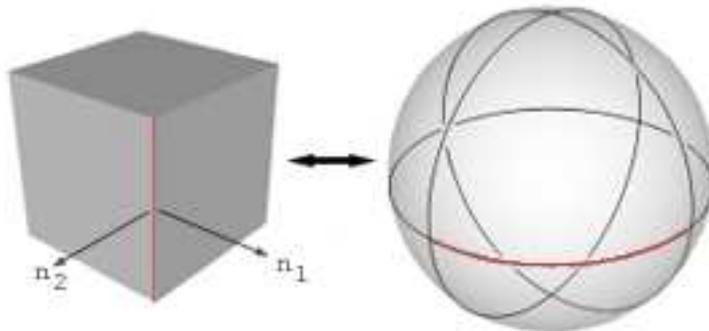


Abbildung 4: Kanten von  $P$  in  $G(P)$

Knoten  $v$  von  $P$  werden unter  $G$  auf Polygone abgebildet, die auf der Einheitssphäre liegen. Die Anzahl der Begrenzungskanten (geodätische Segmente von Kanten in  $P$ ) des Polygons in  $G(P)$  entspricht dabei der Anzahl der Kanten die in  $P$  in diesen Knoten eingehen (siehe Abb. 5).

Mehr dazu in [2].

Die wichtigste Eigenschaft dieser Abbildung ist jedoch, dass ihr Bild (kombinatorisch) dual zum ursprünglichen Polyeder ist. Facetten in  $P$  werden zu Punkten in  $G(P)$  - können wir also eine obere Schranke für die Anzahl der Punkte in  $G(P)$  angeben, so haben wir auch eine obere Schranke für die Anzahl der Facetten in  $P$  gefunden.

Es lassen sich auch noch ein paar weitere Eigenschaften der Gauß'schen Abbildung erkennen, die später von Bedeutung sein werden:

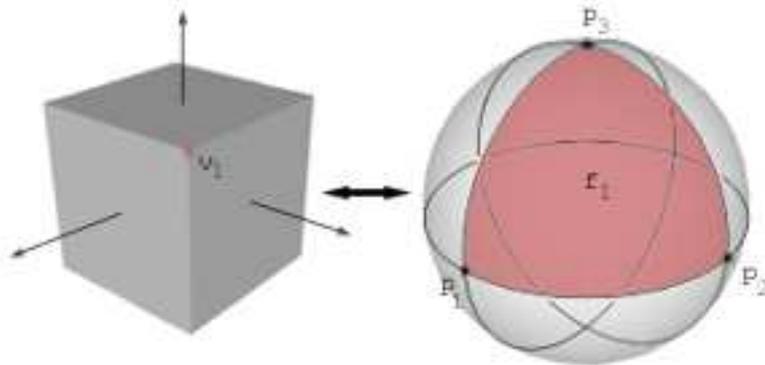


Abbildung 5: Knoten von  $P$  in  $G(P)$

**Lemma 3** Sei  $P$  ein konvexes Polyeder mit  $m$  Facetten. Dann:

1.  $G(P)$  hat genau  $m$  Knoten
2.  $G(P)$  hat maximal  $3m - 6$  Kanten
3.  $G(P)$  hat maximal  $2m - 4$  Facetten

**Beweis.** Die erste Aussage folgt direkt aus der Konstruktion der Gauß'schen Abbildung.

Die zweite Behauptung erhält man, wenn man die Grade der Kanten und Knoten bei der Gauß'schen Abbildung zählt: Es gilt  $2e \geq 3f$ , da auf der einen Seite zu jeder Kante genau zwei Flächen adjazent sind, und auf der anderen Seite mindestens 3 Flächen an einen Knoten grenzen. Setzt man jetzt für  $f$  nach Euler  $f = e - v + 2$  ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}
 3f \leq 2e &\Leftrightarrow 3 \cdot (e - v + 2) \leq 2e \\
 &\Leftrightarrow 3e - 3v + 6 \leq 2e \\
 &\Leftrightarrow e \leq 3v - 6 \\
 &\stackrel{(1.)}{\Leftrightarrow} e \leq 3m - 6 \tag{2}
 \end{aligned}$$

Der letzte Beweis ergibt sich aus der zweiten Behauptung, indem man die Ungleichung  $2e \geq 3f$  nach  $f$  auflöst und für  $e$  die zweite Ungleichung einsetzt.  $\square$

## 2.2 Die Überlagerung von Gauß'schen Abbildungen

Um nun eine obere Schranke für die Komplexität der Minkowski-Summe zweier konvexer Polyeder  $P$  und  $Q$  zu finden, betrachten wir die Gauß'sche Abbildung der Minkowski-Summe  $M = P \oplus Q$ .

In Abbildung 6 sind unter (a) ein Quader  $Q$ , und darunter bei (d) seine Gauß'sche Abbildung  $G(Q)$  dargestellt. Analog für einen Tetraeder  $P$  bei (b) und (e). Schliesslich ist bei (c) die Minkowski-Summe  $P \oplus Q$  und bei (f) die entsprechende Gauß'sche Abbildung zu sehen.

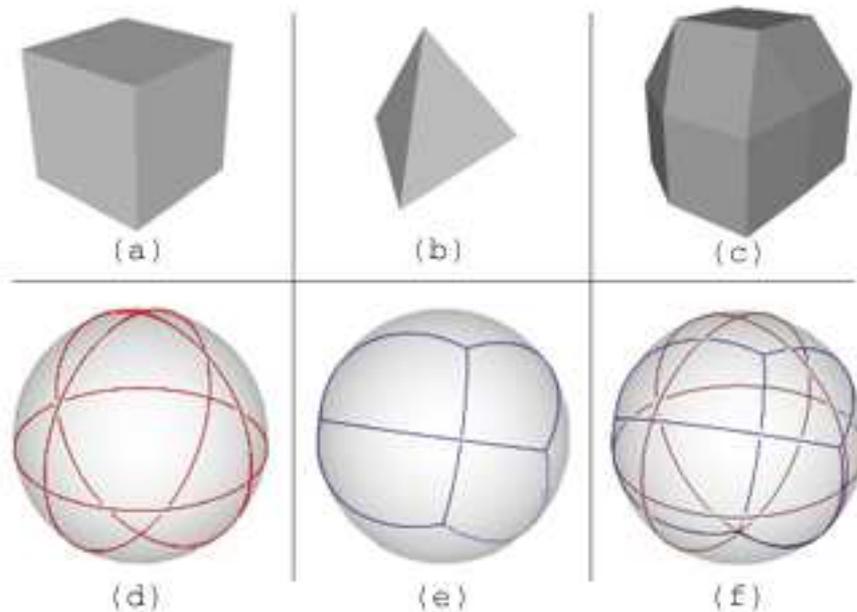


Abbildung 6: Polyeder und ihre Gauß'sche Abbildung

Hier wird offensichtlich, dass ein Zusammenhang zwischen den beiden ursprünglichen Gauß'schen Abbildungen von  $P$  und  $Q$ , sowie der Gauß'schen Abbildung der Minkowski-Summe  $M$  besteht. Diesen wollen wir im folgenden genauer betrachten, hierzu definieren wir:

Eine Überlagerung von zwei planaren Unterteilungen  $S_1$  und  $S_2$  der Ebene ist eine neue Unterteilung  $S$  der Ebene, so dass ein Punkt  $p$  zu einer Region in  $S$  gehört, genau dann wenn dieser Punkt sowohl in  $S_1$  als auch in  $S_2$  zu einer Region gehört. Somit ist die Überlagerung eine Verfeinerung der beiden ursprünglichen Unterteilungen - sie entspricht Mengentheoretisch der Durchschnittsbildung. Analog definiert man die Überlagerung zweier Unterteilungen auf der Einheitskugel.

An Abbildung 6 sieht man, dass die Gauß'sche Abbildung der Minkowski-Summe  $G(M)$  aus der Überlagerung der beiden ursprünglichen Gauß'schen Abbildungen  $G(P)$  und  $G(Q)$  entsteht.

Der Grund für diesen Zusammenhang wird ersichtlich, wenn man sich die Konstruktion der Minkowski-Summe und der Gauß'schen Abbildungen klar macht:

Betrachten wir zunächst die Konstruktion von  $G(M)$  aus  $M$ . Sei  $p$  ein

beliebiger Knoten in  $G(M)$ . Dann entsteht dieser durch eine Fläche  $f$  des Polyeders  $M$  mittels einer Normalen, die auf einer Stützebene  $E$  parallel zu  $f$  steht. Die Fläche  $f$  in  $M$  kann bei der Konstruktion der Minkowski-Summe auf verschiedene Art und Weise entstehen. Sie trägt nur dann zur Außenfläche der Minkowski-Summe (und somit zur Komplexität) bei, wenn die beiden ursprünglichen Elemente in  $P$  und  $Q$  gemeinsame Stützebenen haben (auf Grund der Konstruktion der Minkowski-Summe).

Folgendermaßen kann die Fläche  $f$  in der Minkowski-Summe entstehen:

1. Durch Verschieben einer Fläche von  $P$  entlang einer Kante von  $Q$
2. Durch Verschieben einer Fläche von  $Q$  entlang einer Kante von  $P$
3. Durch Verschieben einer Kante von  $P$  entlang einer Kante von  $Q$
4. Durch Verschieben einer Kante von  $Q$  entlang einer Kante von  $P$

Betrachtet man  $G(M)$  als Überlagerung von  $G(P)$  und  $G(Q)$ , so entsteht ein Punkt in  $G(M)$  entweder direkt aus einem Punkt in  $G(P)$  bzw.  $G(Q)$ , und somit aus einer Fläche in  $P$  bzw.  $Q$ , oder aus einem Schnittpunkt zwischen zwei Kanten - einer aus  $G(P)$  und einer aus  $G(Q)$ . Solch ein Schnittpunkt bedeutet, dass zwei Normalen  $n_1$  in  $P$  und  $n_2$  in  $Q$  existieren, die auf den selben Punkt der Einheitskugel abgebildet werden. Somit existieren wiederum zwei parallele Stützebenen zu diesen Normalen, die in der Minkowski-Summe zu einer neuen Außenfläche führen (siehe oben).

Somit kann man sagen, dass die Minkowski-Summe und die Überlagerung als Abbildungen vertauschen, es gilt  $G(M) = G(P \oplus Q) = G(P) + G(Q)$ , wobei das letzte Plus als Überlagerungsoperator verstanden werden soll.

Mit diesem Wissen lässt sich eine Umschreibung der Anzahl der Facetten von  $M$  über  $G(M)$  formulieren: Seien  $m$  und  $n$  die Anzahl der Facetten von  $P$  und  $Q$ , sowie  $g(m, n)$  die Anzahl der Schnittpunkte zwischen Kanten der beiden Gauß'schen Abbildungen von  $P$  und  $Q$ . Die genaue Komplexität  $f(m, n)$  von  $M$  ist von oben Beschränkt durch die Gleichung

$$f(m, n) \leq g(m, n) + m + n \quad (3)$$

Um einen Zusammenhang zwischen  $m, n$  und  $g(m, n)$  zu erhalten formulieren wir:

**Lemma 4** *Seien  $G_1$  und  $G_2$  Gauß'sche Abbildungen,  $G$  ihre Überlagerung. Seien weiterhin  $f_1, f_2$  und  $f$  die entsprechenden Facettenzahlen. Dann gilt:*

$$f \leq f_1 \cdot f_2 \quad (4)$$

**Beweis.** Seien  $G_1$  und  $G_2$  konvexe Unterteilungen der Kugeloberfläche, wie sie aus Gauß'schen Abbildungen resultieren, und  $G$  die entsprechende Überlagerung. Seien  $f_1, f_2$  und  $f$  wie oben.

Sei  $p$  ein beliebiger Punkt auf der Kugeloberfläche. Dann kann dieser bezüglich  $G_1$  in eine der  $f_1$  Regionen und bezüglich  $G_2$  in eine der  $f_2$  Regionen eingeordnet werden. Somit kann er zusammen in maximal  $f_1 \cdot f_2$  Regionen eingeordnet werden (eine aus  $f_1$  und eine aus  $f_2$ ).

Wäre die Anzahl der Regionen  $f$  in der Überlagerung  $G > f_1 \cdot f_2$ , so müssten zwei Punkte  $p$  und  $p'$  existieren, die bzgl.  $G$  in unterschiedlichen Regionen liegen, bezüglich  $G_1$  und  $G_2$  jedoch in der selben Region.

Angenommen es gibt zwei solche Punkte, dann existiert in  $G$  eine Kante  $e^*$  zwischen  $p$  und  $p'$ , weil sie in unterschiedlichen Regionen liegen. In  $G_1$  und  $G_2$  jedoch existiert keine Kante zwischen  $p$  und  $p'$ , da sie ja in gleichen Regionen liegen.

Da  $G$  jedoch aus der Überlagerung der beiden ursprünglichen Unterteilungen der Ebene entstanden ist, enthält  $G$  nur Kanten aus  $G_1$  und  $G_2$ , somit kann  $e^*$  nicht existieren - und  $p$  und  $p'$  liegen in der selben Region in  $G$ , im Widerspruch zur Annahme!

□

### 2.3 Herleitung einer oberen Schranke

Nun lässt sich die obere Schranke herleiten:

**Theorem 5** *Seien  $P$  und  $Q$  konvexe Polyeder im  $\mathbb{R}^3$  mit  $m$  und  $n$  Facetten. Dann gilt für die Anzahl der Facetten  $f(m, n)$  der Minkowski-Summe  $P \oplus Q$ :*

$$f(m, n) \leq 4mn - 9m - 9n + 26 \quad (5)$$

**Beweis.** Seien in folgenden  $v_1, e_1, f_1$  und  $v_2, e_2, f_2$  die Anzahl der Knoten, Kanten und Facetten von  $G(P)$  bzw.  $G(Q)$ . Seien  $v, e, f$  die Anzahl Knoten, Kanten und Facetten der Minkowski-Summe  $G(M)$ . Auf Grunde der dualen Struktur der Gauß'schen Abbildung gilt:

$$v_1 = m, v_2 = n, v = f(m, n) \quad (6)$$

Wir nehmen an, dass  $P$  und  $Q$  Polyeder solcher Art sind, das die Anzahl der Facetten  $f(m, n)$  der Minkowski-Summe maximal ist (wie solche konstruiert werden, wird später erläutert). Wir beweisen folgendes Lemma, um die Anzahl der Knoten der Gauß'schen Abbildung  $G(M)$  genau abschätzen zu können:

**Lemma 6** *Knoten von  $G(P)$ , Knoten von  $G(Q)$  und Schnittpunkte zwischen Kanten von  $G(P)$  und  $G(Q)$  fallen nicht an einer Stelle zusammen.*

**Beweis.** Angenommen es gibt einen Punkt  $p$ , in dem zwei Knoten von  $G(P)$  und  $G(Q)$  oder ein Schnittpunkt und ein Knoten zusammenfallen. Dann kann man entweder  $P$  oder  $Q$  (oder beide) leicht rotieren, wodurch auch die Überlagerung der Gauß'schen Abbildungen verändert wird. Die Anzahl der Knoten  $v = f(m, n)$  würde sich dadurch erhöhen im Widerspruch zur Annahme, dass  $f(m, n)$  maximal ist!  $\square$

Also entspricht die Anzahl der Knoten in  $G(M)$  genau

$$v = v_1 + v_2 + v_x, \quad (7)$$

wobei  $v_x$  die Anzahl der Schnittpunkte zwischen  $G(P)$  und  $G(Q)$  in  $G(M)$  ist.

Nun lassen sich verschiedene Aussagen in Form von Gleichungen über  $G(M)$  treffen:

$$2e_1 + 2e_2 + 4v_x = 2e \Leftrightarrow e = e_1 + e_2 + 2v_x \quad (8)$$

Diese Gleichung entsteht, wenn man die Eingangs-/Ausgangsgrade der Knoten zählt: Die linke Seite zählt alle Grade in  $G(M)$  als Überlagerung von  $G(P)$  und  $G(Q)$ , wobei Knoten von  $G(P)$  und  $G(Q)$  zweifach gewichtet werden (da in diese 2 Kanten münden), und Knoten die aus Schnittpunkten entstehen vierfach. Die rechte Seite berücksichtigt, dass jede Kante in genau 2 Knoten mündet, und somit ist der Grad zweimal die Anzahl Kanten in  $G(M)$ .

Außerdem erhält man mittels Euler:

$$\begin{aligned} v - e + f = c + 1 &\Leftrightarrow e = f + v - 1 - c \\ &\stackrel{(8)}{\Leftrightarrow} e_1 + e_2 + 2v_x = f + v - 2 \\ &\stackrel{(7)}{\Leftrightarrow} e_1 + e_2 + 2v_x = f + v_1 + v_2 + v_x - 2 \\ &\Leftrightarrow v_x = f + v_1 + v_2 - 2 - e_1 - e_2 \end{aligned} \quad (9)$$

Nun haben wir eine Gleichung mit 6 Unbekannten, wobei unser Ziel ist,  $v_x$  nur über die Variablen  $v_1$  und  $v_2$  zu beschränken. Hierzu müssen wir sowohl  $e_1$  und  $e_2$ , als auch  $f$  durch  $v_1$  bzw.  $v_2$  ausdrücken. Nach Lemma 3 ist die Anzahl der Kanten  $e$  von oben durch die Anzahl der Facetten beschränkt. Somit kann man  $e_1$  und  $e_2$  mit Hilfe von Konstanten  $l_1$  und  $l_2$  ausdrücken:

$$e_1 = 3v_1 - 6 - l_1 \quad (10)$$

$$e_2 = 3v_2 - 6 - l_2 \quad (11)$$

Ausserdem gilt für  $i \in \{1, 2\}$  nach Euler:

$$\begin{aligned}
v_i - e_i + f_i = c + 1 &\Leftrightarrow f_i = e_i + 2 - v_i \\
&\stackrel{(10)}{\Leftrightarrow} f_i = 3v_i - 6 - l_i + 2 - v_i \\
&\Leftrightarrow f_i = 2v_i - 4 - l_i,
\end{aligned}$$

wobei  $l_1$  und  $l_2$  positive ganzzahlige Konstanten sind. Es resultieren 2 weitere Gleichungen:

$$f_1 = 2v_1 - 4 - l_1 \quad (12)$$

$$f_2 = 2v_2 - 4 - l_2 \quad (13)$$

Setzt man diese in Gleichung 9 ein, nachdem man Lemma 4 angewendet hat, so erhält man:

$$\begin{aligned}
v_x &= f + v_1 + v_2 - 2 - e_1 - e_2 \\
&\stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} v_x \leq f_1 \cdot f_2 + v_1 + v_2 - 2 - e_1 - e_2 \\
&\stackrel{(10,f)}{\Leftrightarrow} v_x \leq f_1 \cdot f_2 + v_1 + v_2 - 2 - (3v_1 - 6 - l_1) - (3v_2 - 6 - l_2) \\
&\stackrel{(12,f)}{\Leftrightarrow} v_x \leq (2v_1 - 4 - l_1) \cdot (2v_2 - 4 - l_2) + v_1 + v_2 - 2 - (3v_1 - 6 - l_1) - (3v_2 - 6 - l_2) \\
&\Leftrightarrow v_x \leq 4v_1v_2 - 10v_1 - 10v_2 + 26 + h(l_1, l_2), \quad (14)
\end{aligned}$$

wobei

$$h(l_1, l_2) = l_1l_2 + 5l_1 + 5l_2 - 2v_1l_2 - 2v_2l_1. \quad (15)$$

Dieser Term kann in der Ungleichung jedoch vernachlässigt werden, wie man folgendermaßen sieht:  $G(P)$  besteht immer nur aus einer Zusammenhangskomponente, es muss also mindestens  $v_1 - 1$  Kanten geben, die alle Knoten mit einander verbinden:

$$\begin{aligned}
v_1 - 1 \leq e_1 &\stackrel{(10)}{\Leftrightarrow} v_1 - 1 \leq 3v_1 - 6 - l_1 \\
&\Leftrightarrow l_1 \leq 2v_1 - 5
\end{aligned}$$

Eine analoge Gleichung lässt sich für  $v_2$  und  $e_2$  formulieren, man erhält zusammen die oberen Schranken für  $l_1/l_2$ :

$$l_1 \leq 2v_1 - 5 \quad (16)$$

$$l_2 \leq 2v_2 - 5 \quad (17)$$

Eingesetzt in Gleichung 15 ergibt sich eine Abschätzung für diesen Term:

$$\begin{aligned}
h(l_1, l_2) &= l_1 l_2 + 5l_1 + 5l_2 - 2v_1 l_2 - 2v_2 l_1 \\
&= \frac{l_1 l_2}{2} + 5l_1 - 2v_2 l_1 + \frac{l_1 l_2}{2} + 5l_2 - 2v_1 l_2 \\
&= l_1 \cdot \left( \frac{l_2}{2} + 5 - 2v_2 \right) + l_2 \cdot \left( \frac{l_1}{2} + 5 - 2v_1 \right) \\
&= l_1 \cdot \left( \frac{l_2}{2} - (2v_2 - 5) \right) + l_2 \cdot \left( \frac{l_1}{2} - (2v_1 - 5) \right)
\end{aligned}$$

Setzt man nun Gleichung 16 und 17 ein, so sieht man, dass  $h(l_1, l_2) \leq 0$  gilt! Insbesondere gilt für  $l_1 = l_2 = 0$ , dass der Term verschwindet und somit die maximale Anzahl an Facetten der Minkowski-Summe erreicht wird. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Anzahl Kanten von  $G(P)$  und  $G(Q)$  maximal sind. Schliesslich ergibt sich die obere Schranke, indem man Ungleichung 14 mit Aussage 7 kombiniert:

$$\begin{aligned}
f(m, n) &= v_1 + v_2 + v_x \\
&\leq v_1 + v_2 + 4v_1 v_2 - 10v_1 - 10v_2 + 26 \\
&\leq 4v_1 v_2 - 9v_1 - 9v_2 + 26
\end{aligned}$$

Da die Anzahl der Knoten in  $G(M)$  der Anzahl der Facetten in der Minkowski-Summe  $M$  der beiden konvexen Polyeder entspricht, folgt die Behauptung.  $\square$

### 3 Eine untere Schranke

Als nächstes wollen wir eine untere Schranke für die maximale Komplexität der Minkowski-Summe zweier konvexer Polyeder  $P$  und  $Q$  finden, wobei  $m$  und  $n$  beliebig (mindestens 4) sein werden. Hierbei nutzen wir wieder die duale Struktur der Gauß'schen Abbildung um den Aufbau von Polyedern zu analysieren, die zu einer Minkowski-Summe maximaler Komplexität führen. Die entstehenden Gauß'schen Abbildungen entsprechen einer bestimmten Art von Polyedern die nach genauer Betrachtung von  $G(P)/G(Q)$  erzeugt werden können. Es genügt also zu zeigen, dass wir, gegeben  $m$  und  $n$ , zwei Polyeder konstruieren können, deren Gauß'sche Abbildungen eine maximale Anzahl an Schnittpunkten haben werden.

Hierzu beobachten wir zunächst:

**Lemma 7** *Die maximale Komplexität der Minkowski-Summe kann nur dann erreicht werden, wenn die Anzahl der Kanten sowohl bei  $P$  als auch bei  $Q$  maximal bezüglich der Anzahl der Facetten ist.*

**Beweis.** O.B.d.A sei  $P$  Polyeder mit  $m$  Facetten, dessen Kantenzahl nicht maximal bzgl.  $m$  ist, es gilt also  $e_P < 3m - 6$ . Angenommen dann hätte die

Minkowski-Summe mit einem Polyeder  $Q$  (mit  $n$  Facetten und  $e_Q = 3n - 6$  Kanten) trotzdem maximale Komplexität. Dann ist mit  $e$  auch die Anzahl der Kanten der entsprechenden Gauß'schen Abbildung nicht maximal, und durch Hinzufügen einer weiteren Kante zum Polyeder entsteht eine neue Kante in der Gauß'schen Abbildung. Diese kann so platziert werden, dass durch sie mindestens ein neuer Schnittpunkt entsteht, und somit wird die Komplexität der Minkowski-Summe erhöht im Widerspruch zur Annahme.  $\square$

Es lässt sich zeigen, dass sich konvexe Polyeder mit  $m$  bzw.  $n$  Facetten konstruieren lassen, so dass die Anzahl Facetten der resultierenden Minkowski-Summe genau der oberen Schranke entspricht:

**Theorem 8** *Seien  $m, n \in \mathbb{N}, m \geq 4, n \geq 4$  beliebig. Dann kann man zwei konvexe Polyeder  $P, Q$  im  $\mathbb{R}^3$  konstruieren, so dass die Anzahl Facetten  $f(m, n)$  der Minkowski-Summe  $P \oplus Q$  folgende Gleichung erfüllt:*

$$f(m, n) = 4mn - 9m - 9n + 26 \quad (18)$$

**Beweis.**

Wir werden zunächst den Spezialfall  $m = 4$  behandeln und dann an Hand des Falles  $m = 5$  einen allgemeinen Ansatz entwickeln.

Hierzu sei im Folgenden bei gegebenem  $i$   $P_i$  definiert als Polyeder mit  $i$  Flächen, welches eine Minkowski-Summe mit maximaler Komplexität erzeugt.

### 3.1 Konstruktion von $P_4$

Auf Grund von Lemma 3 und von Lemma 7 wissen wir, dass das konvexe Polyeder mit maximaler Komplexität der Minkowski-Summe als Gauß'sche Abbildung genau  $m = 4$  Knoten,  $3m - 6 = 6$  Kanten und  $2m - 4 = 4$  Facetten hat. Somit hat das entsprechende Polyeder ebenfalls 4 Knoten, 6 Kanten und 4 Facetten.

Wir konstruieren die entsprechende Gauß'sche Abbildung folgendermaßen: Zur Orientierung teilen wir zunächst die Einheitskugel in zwei Halbkugeln  $H^+ = \{(x, y, z | y > 0\}$  und  $H^- = \{(x, y, z | y \leq 0\}$  mit einer Ebene  $y = 0$ . Wir platzieren zwei Knoten  $v_0$  und  $v_1$  Nahe dem einen Pol  $(0,0,1)$  und die beiden Anderen ( $v_2$  und  $v_3$ ) gegenüber bei  $(0,0,-1)$ . Eine Kante, die zwei gegenüber liegende Knoten  $v_0$  und  $v_2$  verbindet, liegt ganz in  $H^+$  (in Abb. 7 grünlich,  $e_0$ ). Drei weitere Kanten, die gegenüber liegende Knoten verbinden liegen hauptsächlich in  $H^-$  ( $e_1, e_2, e_3$ ). Die letzten beiden Kanten (nicht gekennzeichnet) verbinden Knoten auf einer Seite. Die Kanten  $e_1, e_2$  und  $e_3$  haben eine Länge von ungefähr  $\pi$ .

Das entsprechende konvexe Polyeder ist in Abbildung 8 dargestellt.

Man sieht in Abbildung (a), dass die Projektion aller vier Punkte auf die  $z$ -Ebene auf einem Einheitskreis liegt. Schaut man entlang der  $z$ -Achse,

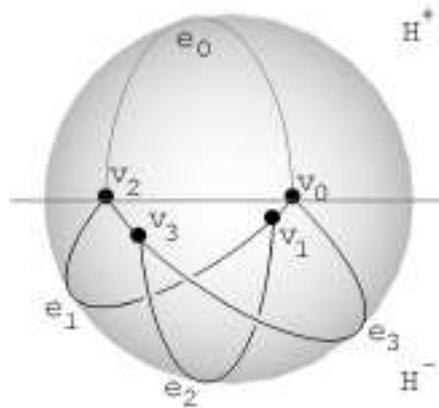


Abbildung 7: Konstruierte Gauß'sche Abbildung

allerdings leicht von unten, so erhält man das Bild bei (b), wenn man sich jedoch von der  $z$ -Ebene leicht nach oben bewegt, so erhält man (d). Das letzte Bild (b) zeigt eine seitliche Ansicht - allerdings auch leicht schräg, da eine direkte Ansicht in  $Y$ -Richtung das Polyeder fast verschwinden lassen würde.

Da immer zwei Knoten in der Gauß'schen Abbildung nah beieinander liegen, ist der entsprechende Winkel zwischen den adjazenten Flächen im Polyeder sehr flach (Außenwinkel knapp über  $180^\circ$ ). Es sind von  $z = -\infty$  und von  $z = +\infty$  je zwei Flächen des Polyeders sichtbar.

Betrachtet man nun zwei solche konvexe Polyeder (also den Fall  $m = n = 4$ ), bzw. deren Gauß'sche Abbildungen, so sieht man das sich bei solch einer Konstruktion die Anzahl der Schnittpunkte zwischen  $G(P)$  und  $G(Q)$  maximieren lässt. Dies führt zu einer maximalen Minkowski-Summen-Komplexität, da, wie wir uns erinnern, die Anzahl der Knoten in  $G(M)$  (und somit die Anzahl der Flächen von  $M$ ) genau dann maximal wird, wenn die Anzahl der Schnittpunkte zwischen Kanten von  $G(P)$  und  $G(Q)$  maximal ist.

Wir wissen bereits, das es in diesem Fall maximal  $4mn - 9m - 9n + 26 = 4^3 - 36 - 36 + 26 = 18$  Knoten in  $G(M)$  gibt, wobei 8 direkt aus  $G(P)$  und  $G(Q)$  entstehen. Lässt obige Konstruktion also 10 Schnittpunkte zu, so ist der Fall  $P_4$  erledigt.

Dies belegt man durch einfaches Nachzählen an Abbildung 9. Die beiden Polyeder wurden hierzu zunächst orthogonal ausgerichtet, und dann wurde eins um 90 Grad um die  $Y$ -Achse gedreht.

### 3.2 Konstruktion von $P_5$

Ähnlich zum obigen Vorgehen lässt sich auch für  $P_5$  eine Gauß'sche Abbildung konstruieren, die es uns ermöglicht die Anzahl der Schnittpunkte zu

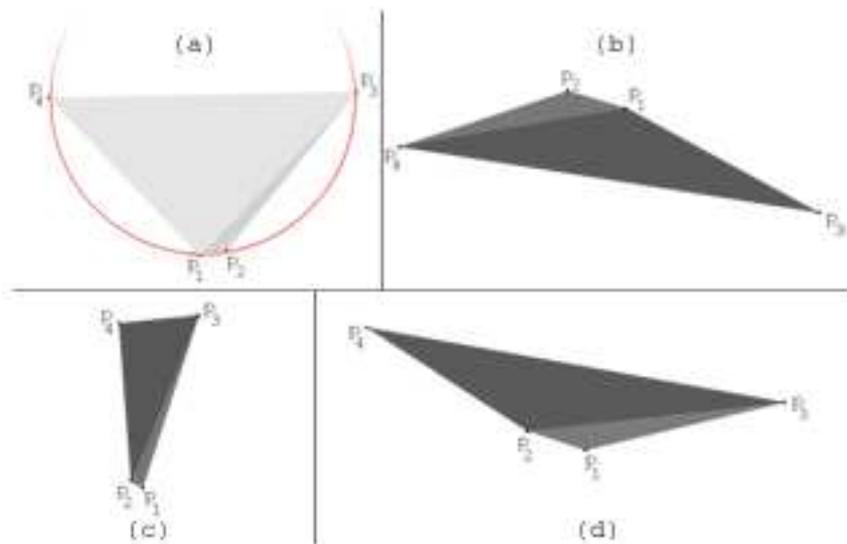


Abbildung 8: Polyeder zur Gauß'schen Abbildung

maximieren. Die Anzahl der Knoten, Kanten und Flächen von  $P_5$  kann nach dem gleichen Argument wie oben festgelegt werden:

$$\begin{aligned} v_G &= m = 5 \\ e_G &= 3m - 6 = 9 \\ f_G &= 2m - 4 = 6 \end{aligned}$$

Wieder teilen wir die Einheitskugel in zwei Halbebenen  $H^+$  und  $H^-$  mittels der Ebene  $p$  ( $y = 0$ ). Des weiteren legen wir 3 Knoten in eine Ebene ( $x = 0$ ). Dies sind in Abbildung 10 die Knoten  $u, v$  und  $w$ , wobei  $u$  knapp überhalb des Pols  $(0,0,-1)$  ist und somit als einziger Knoten in  $H^+$  liegt.  $v$  ist auf der anderen Seite direkt auf dem Pol platziert und  $w$  knapp darunter.

Alle weiteren Punkte liegen in der Nähe von  $u$  unterhalb des Pols und nicht in einer Ebene mit  $u, v$  und  $w$  (sonst würden bei dieser Konstruktion zu wenige Schnittpunkte entstehen, da mehrere Schnittpunkte zusammenfallen und somit die Minkowski-Summe nicht die maximale Komplexität hat). Genau wie beim ersten Fall gibt es genau eine Kante, die ganz in  $H^+$  verläuft, alle anderen sind in der unteren Halbkugel und haben wieder eine Länge nahe bei  $\pi$ . Auf Grund der Konstruktion ist klar, dass alle Kantenlängen  $l$  die Ungleichung  $l < \pi$  erfüllen.

Bleibt zu zeigen, dass sich alle bis auf eine Kante von  $G(P)$  wieder mit allen bis auf eine Kante von  $G(Q)$  schneiden, und die beiden übrigen Kanten (das sind die, die in  $H^+$  verlaufen) sich gegenseitig schneiden. Hierzu nimmt man wieder zwei orthogonale Polyeder und dreht das eine um 90 Grad (um die  $y$ -Achse). Man erhält als Resultat Abbildung 11.

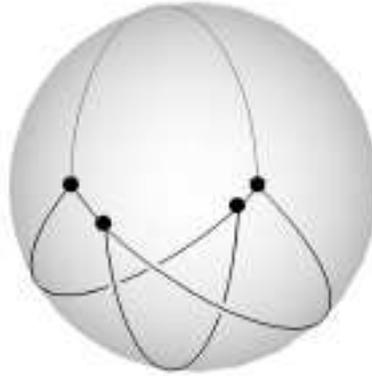


Abbildung 9: Gauß'sche Konstruktion zu  $P_4$

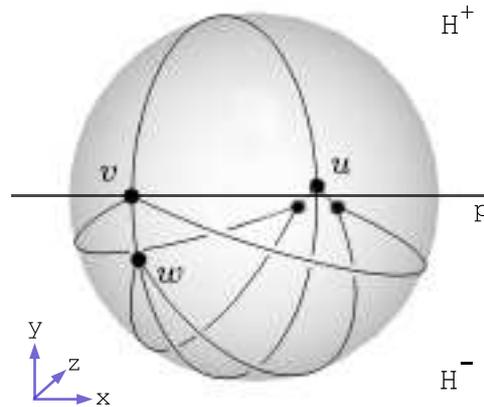


Abbildung 10: Gauß'sche Konstruktion zu  $P_5$

Offensichtlich schneiden sich sowohl die beiden Kanten in  $H^+$  ( $\Rightarrow 1$  Schnittpunkt) als auch gegenseitig alle Kanten in  $H^-$ . Auf Grund von Lemma 3 wissen wir nun also, dass es folgende Anzahl an Schnittpunkten gibt:

$$(2m - 5) \cdot (2n - 5) + 1 = 4mn - 10m - 10n + 25 + 1$$

Addiert man dazu die Schnittpunkte, die direkt aus  $G(P)$  und  $G(Q)$  übernommen wurden, so erhält man die gewünschte Anzahl.

Es folgt die Konstruktion eines entsprechenden Polyeders: Wieder liegen alle Knoten von  $P_5$  auf dem Einheitskreis (bzw. auf dessen unterer Hälfte) bzgl. der Projektion auf die Ebene  $z = 0$ . Um zu erreichen, dass 2 Knoten in der Gauß'schen Abbildung beim einen Pol liegen (im folgenden  $u$  und  $v$ ), und alle anderen in der Nähe des gegenüber liegenden Pols, dürfen von  $z = \infty$  nur zwei Flächen (im folgenden  $U$  und  $V$ ) sichtbar sein, und von der anderen

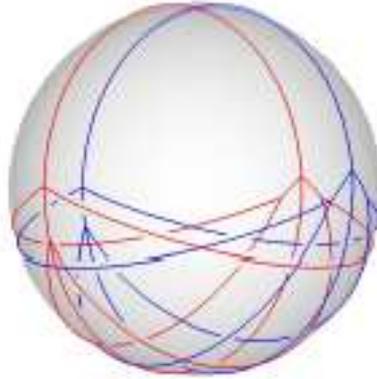


Abbildung 11: Gauß'sche Überlagerung von  $P_5$  und  $P_5$

Seite die restlichen drei Facetten. Zwischen  $U$  und  $V$  muss ausserdem wieder ein Winkel nur minimal größer als  $180^\circ$  bestehen. Entsprechend muss auf der anderen Seite, die in diesem Fall aus 3 Flächen besteht, der Winkel zwischen den Facetten ebenfalls sehr flach sein (man erhält insgesamt ein sehr flaches konvexes Polyeder).

Es ergibt sich das Polyeder dual zum Bild der Gauß'schen Abbildung (Abbildung 12).

### 3.3 Konstruktion von $P_i, i \geq 5$

Wir wollen nun eine allgemeine Konstruktionsanleitung in 4 Schritten für Polyeder angeben, die (für  $i \geq 5$ ) zu Gauß'schen Abbildungen ähnlich den oben gezeigten führt. Um wiederum eine Verteilung der Knoten in der Gauß'schen Abbildung von 2 zu  $i-2$  auf die beiden Pole zu erhalten, müssen wir sicher stellen, das von einer Seite nur 2 Facetten des Polyeders sichtbar sind, und von der anderen  $i-2$  Facetten.

#### 3.3.1 Platzieren der Knoten

Zunächst werden die  $2i-4$  Knoten auf der Ebene  $z=0$  auf einem Halbkreis folgendermaßen verteilt: Beginne links oben mit  $v_{\lfloor(i-2)/2\rfloor+1}$ . Gegen den Uhrzeigersinn folgen nun  $v_{i-2}$  und  $v_{\lfloor(3i-7)/2\rfloor}$ , wobei letzterer Punkt leicht Links von der Mitte des Halbkreises positioniert wird und der andere in der Mitte von  $v_{\lfloor(i-2)/2\rfloor+1}$  und  $v_{\lfloor(3i-7)/2\rfloor}$ .

Diese drei Punkte werden jetzt gespiegelt, so das sie auch auf dem anderen Viertelkreis liegen, allerdings mit den Nummern (wieder gegen den Uhrzeigersinn)  $\lfloor(3i-7)/2\rfloor+1$ , 0 und  $\lfloor(i-2)/2\rfloor$ .

Alle weiteren Knoten werden nun, in numerischer Ordnung gegen den Uhrzeigersinn, zwischen die schon gesetzten Knoten verteilt. Hierbei ist dar-

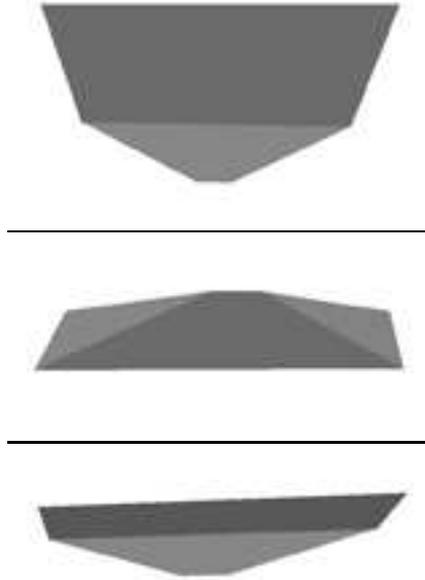


Abbildung 12: Polyeder zu  $G(P_5)$

Oben: Ansicht von oben (entlang der  $z$ -Achse) auf das Polyeder.

Mitte: Ansicht entlang der  $y$ -Achse leicht von unten.

Unten: Ansicht entlang der  $y$ -Achse leicht von oben.

auf zu achten, das die Verteilung der restlichen Knoten symmetrisch zu den beiden mittleren passiert. Abbildung 13 erläutert die beiden Schritte am Beispiel von  $P_{10}$ .

Bis jetzt liegen alle Knoten auf der Ebene  $z = 0$ , was natürlich noch korrigiert werden muss. Hierzu werden die beiden untersten roten Knoten (allgemein  $v_{\lfloor(3i-7)/2\rfloor}$  und  $v_{\lfloor(3i-7)/2\rfloor+1}$ , hier  $v_{11}$  und  $v_{12}$ ) leicht (genaueres später) unter die Ebene  $z = 0$  gelegt, und alle Knoten zwischen diesen und ihrem linken bzw. rechten Nachbarn ( $v_{i-2}$  und  $v_0$ , hier  $v_8$  und  $v_0$ ) werden bzgl. ihrer  $z$ -Koordinaten auf die Verbindungslinie zwischen diesen Punkten gelegt.

### 3.3.2 Flächen und Kanten

Wie bereits gesagt, sollen von einer Seite 2 Flächen sichtbar sein, von der anderen  $i-2$ . Hierzu wird die Fläche  $f_1 = \overline{v_0, v_1, \dots, v_{i-2}}$  gebildet, und die adjazente Fläche  $f_2 = \overline{v_{i-2}, v_{i-1}, \dots, v_{2i-5}, v_0}$ .

Auf der anderen Seite verfährt man in beiden Viertelkreisen gleich: Jeder Punkt ausser dem mittleren (im Allgemeinen  $v_{i-2}$  und  $v_0$ , hier  $v_8$  und  $v_0$ ) wird mit einer Kante verbunden mit dem entsprechenden Punkt, gespiegelt

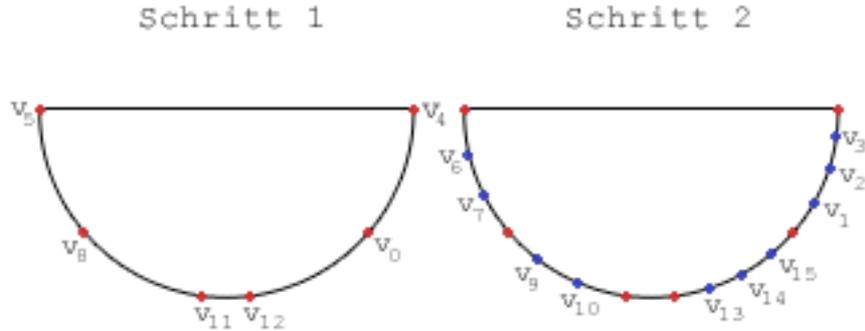


Abbildung 13: Konstruktion von  $P_{10}$

an der Kante  $e = \overline{v_{i-2}v_0}$  (siehe Abb. 14).

Durch  $f_1$  und  $f_2$  entstehen die beiden Knoten in  $G(P)$ , die nah bei dem einen Pol liegen - entsprechend darf der Winkel zwischen den beiden Facetten nicht zu groß sein. Die Flächen auf der Rückseite von  $P$  (Seite 2 in der Abbildung) haben dadurch untereinander ebenfalls Fläche außenseitige Winkel, und die dualen Knoten in  $G(P)$  liegen nah bei einander.

### 3.3.3 Winkel

Genauer müssen drei bestimmte Winkel einige Einschränkungen erfüllen:

1. Der äußere Öffnungswinkel  $\alpha$  zwischen  $f_1$  und  $f_2$  muss so flach sein, das die beiden zu  $f_1$  und  $f_2$  dualen Punkte  $v$  und  $w$  nah beieinander liegen.
2. Der Winkel  $\beta$  zwischen  $v_{\lfloor(3i-7)/2\rfloor}$ , Kreismittelpunkt und  $v_{\lfloor(3i-7)/2\rfloor+1}$  muss ausreichend klein sein.
3. Der Winkel  $\gamma$  zwischen  $v_0$ , Kreismittelpunkt und  $v_{\lfloor(i-2)/2\rfloor-1}$ , der die Verteilung der Zwischenpunkte bestimmt, muss bei großen  $m, n$  klein werden. Im Fall  $m = n = 10$  genügt hier auch ein großer Winkel, der zu einer Gleichverteilung der Punkte auf dem Kreisbogen führt.

Siehe hierzu auch Abbildung 15.

Durch die Wahl von diesen Winkeln, muss die y-Koordinate des Knoten  $w$  in  $G(P)$  größer sein als die y-Koordinate der Kante  $\overline{xv}$  an der Stelle  $z = 0$ , wobei  $x$  der zur Fläche  $f_4$  duale Knoten in  $G(P_i)$  ist. Analog muss in

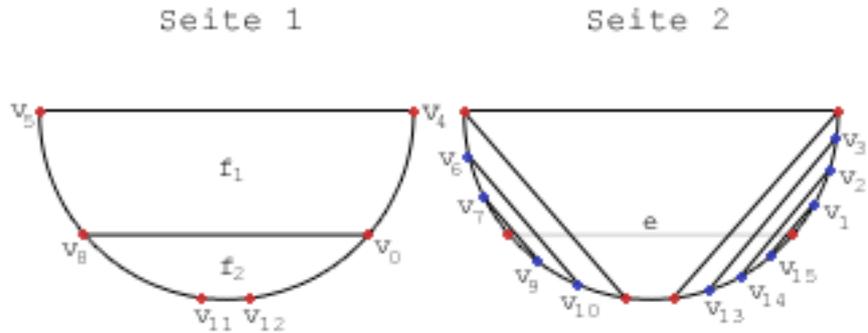


Abbildung 14: Flächen und Kanten von  $P_{10}$

$G(Q)$  die  $y$ -Koordinate des Punktes  $w$  größer sein als die  $y$ -Koordinate der Kante  $\overline{xv}$  bei  $z = 0$ . Für die Werte der  $y$ -Koordinate von  $w$  in  $G(P)$  bzw.  $G(Q)$  ergibt sich dann  $\sin(\alpha)$ . Die anderen Parameter können experimentell bestimmt werden, so dass sie die obigen Bedingungen nicht verletzen.

□

Insgesamt haben wir somit gezeigt, dass die Minkowski-Summe zweier konvexer Polyeder (genau) die maximale Komplexität  $4mn - 9m - 9n + 26$  hat.

## Literatur

- [1] E. Fogel, D. Halperin, and C. Weibel. On the exact maximum complexity of minkowski sums of convex polyhedra. pages 319–326, June 2007.
- [2] C. Hodgson, I. Rivin, and W. Smith. A characterization of convex hyperbolic polyhedra and of convex polyhedra inscribed in the sphere. *Bull (New Series) of the AMS*, 27:246–251, 1992.
- [3] J.-M. Lien. Point-based minkowski sum boundary. In *Pacific Conference on Computer Graphics and Applications*, to appear, 2007.

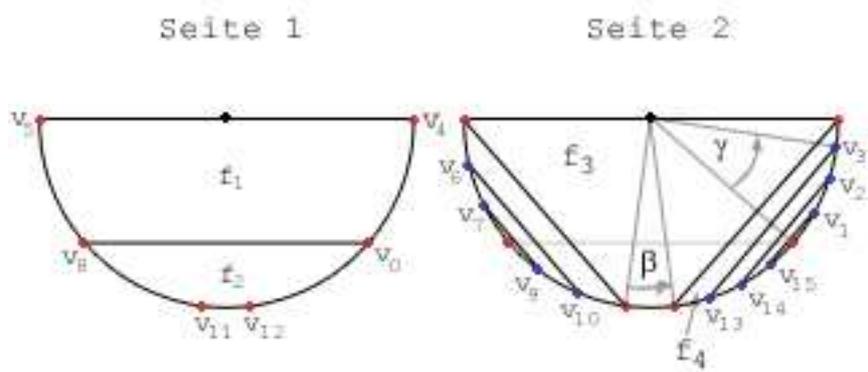


Abbildung 15: Einstellungswinkel in  $P_{10}$