Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn
Institut für Informatik I

Ingo Wolfertz

Das Minimum-Area Spanning Tree Problem

18. Dezember 2007

Seminararbeit im WS 2007/2008

Zusammenfassung

Diese Ausarbeitung beschäftigt sich mit Spannbäumen minimaler Fläche, wobei sich bei einer gegebenen Punktmenge P in der Ebene die Fläche des Spannbaumes T durch die Vereinigung der $n-1$ Kreise, deren jeweilige Durchmesser den Kanten aus T entsprechen, ergibt. In Kapitel 2 dieser Ausarbeitung wird gezeigt, daß der minimale Spannbaum (minimal bezüglich der Kantenlänge) einer Punktmenge P in der Ebene eine Approximation um einen konstanten Faktor für den *Minimum-Area Spanning Tree* (MAST) ist. Diese wichtige Eigenschaft des Minimum Spanning Trees wird dann verwendet, um in den nachfolgenden Kapiteln weitere Probleme zu approximieren. So wird in Kapitel 3 bewiesen, daß die Bestimmung der jeweiligen Abstände von Punkten einer Punktmenge P in der Ebene, eine Approximation um einen konstanten Faktor für das *Minimum Area Range Assignment* (MARA) Problem ist. In Kapitel 4 wird das *Minimum-Area Connected Disk Graph* (MACDG) Problem vorgestellt, für das gezeigt wird, daß auch hier eine Approximation um einen konstanten Faktor existiert. Im fünften und letzten Kapitel dieser Ausarbeitung wird das *Minimum-Area Tour* (MAT) Problem besprochen. Die Approximation, die wir hier erhalten, basiert auf dem Ergebnis des TSP mit einer parametrieseerten Dreiecksungleichung.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Ein minimaler Spannbaum einer gegebenen Punktmenge P im $\mathbb{R}^2$, ist ein zusammenhängender Graph, der alle Punkte miteinander verbindet und bei dem die Summe der Längen aller Kanten minimal ist. Er kann zum Beispiel mit Hilfe des Algorithmus von Kruskal [5] in Zeit $O(m \cdot log\,(n))$ berechnet werden, wobei m für die Anzahl der Kanten und n für die Anzahl der Knoten in dem Graphen steht. Minimale Spannbäume werden in der Praxis verwendet, wenn man kostengünstige Netzwerke (z.B. Computer- oder Telefonnetzwerke) errichten möchte. In der Graphentheorie bedient man sich des minimalen Spannbaumes, um Approximationsalgorithmen für schwierige Probleme, wie z.B. das *Travelling-Salesman-Problem* zu entwickeln.
Ein Problem, mit dem wir uns in Kapitel 3 beschäftigen werden ist das folgende: Angenommen, wir möchten verschiedene Sendestationen in einem bestimmten Gebiet aufstellen. Wie können wir nun sicherstellen, daß die Frequenzen der einzelnen Stationen sich nicht überlagern. Hier helfen uns die minimalen Spannbäume, wobei sich minimal auf die Länge der jeweiligen Kanten bezieht.
Eine wichtige Eigenschaft des minimalen Spannbaumes, die zu Beginn dieser Ausarbeitung in Kapitel 2 vogestellt wird, ist, daß er eine Approximation bis auf einen konstanten Faktor für das *Minimum-Area Spanning Tree* (MAST) Problem liefert. Diese Eigenschaft, die zugleich auch das Hauptergebnis dieser Ausarbeitung ist, wird für eine ganze Klasse von Problemen verwendet, zu der auch das MAST-Problem gehört: Zu einer gegebenen Punktmenge P in der Ebene wird ein Spannbaum T minimaler Fläche gesucht, wobei die Fläche aus den Kreisen besteht, die entstehen, wenn man für jede Kante e in T einen Kreis mit Durchmesser e zeichnet. Die Gesamtfläche, ergibt sich dann aus der Vereinigung dieser $n-1$ Kreise. Wichtig an dieser Stelle in zu erwähnen, daß die Vereinigung der so entstandenen Kreise ungleich der Summe dieser Kreise ist, da es sich nicht zwingend um eine disjunkte Vereinigung handelt. Eine weitere interessante Eigenschaft bezüglich der Fläche des minimalen Spannbaumes, die wir als Zwischenergebnis erhalten, ist die Tatsache, daß ein Punkt nur in in der Schnittmenge von konstant vielen Kreisen enthalten sein kann.
Ein weiteres Problem, welches in Kapitel 3 präsentiert wird, ist das *Minimum Area Range Assignment* (MARA) Problem, das auf dem Minimum Spanning Tree einer euklidischen Punktmenge basiert. Hierbei handelt es sich um eine Variante des *power assignment* Problems, bei der es darum geht, daß

(i) der Kommunikationsgraph[1] (d.h. der Graph, in dem eine gerichtete Kante von $p_i \in P$ nach $p_j \in P$ dann und nur dann vorhanden ist,

[1]Die jeweiligen Punkte des Graphen stehen für Transmitter, denen eine bestimmte Übertragungsreichweite zugeordnet wird.

wenn p_j im Kreis D_{p_i} mit Mittelpunkt p_i liegt, wobei der Radius r_i von D_{p_i} dem Sendebereich von p_i entspricht) stark zusammenhängend ist, und

(ii) die Fläche der Vereinigung der Kreise $D_{p_1}, ...D_{p_n}$ minimal ist.

In der Standardversion des *power assignment* Problems wird dagegen in Punkt (ii) gefordert, daß die Kosten $\sum_{p_i \in P} area(D_{p_i})$ zur Bestimmung der Wirkungsbereiche der Punkte aus P minimal sind. Kirousis et al. [7] und Clementi et al. [6] erzielten für dieses NP-harte Problem eine 2-Approximation, die auf dem minimalen Spannbaum von P basiert. Diese Approximation ist zugleich auch die beste bekannte. Am Ende dieses Kapitels wird bewiesen, daß die Reichweitenbestimmung von Kirousis et al. eine Approximation bis auf einen konstanten Faktor für das MARA-Problem ist.
Als nächstes wird in Kapitel 4 das *Minimum-Area Connected Disk Graph* (MACDG) Problem beschrieben, für das ebenfalls eine konstante Faktor Approximation existiert. Bei dem MACDG-Problem geht es darum, für jeden Punkt p einer Punktmenge P in der Ebene einen Graphen zu finden, so daß

(i) der (Kreis-)Graph, der entsteht, wenn man um jeden Punkt $p_i \in P$ einen Kreis D_{p_i} mit Radius r_i zeichnet (r_i entspricht dem Abstand von p_i zu dem am weitesten entfernten Nachbarn p_j), zusammenhängend ist; es existiert also dann eine Kante zwischen $p_i \in P$ und $p_j \in P$, wenn $D_{p_i} \cap D_{p_j} \neq \emptyset$.

(ii) die Fläche der Vereinigung der Kreise $D_{p_1} \cup ... \cup D_{p_n}$ minimal ist.

In Kapitel 5 wird das *Minimum-Area Tour* (MAT) Problem und somit auch das letze Problem dieser Ausarbeitung beschrieben. Es handelt sich hierbei um eine Variante des bekannten *travelling salesman* Problems. Gesucht ist also eine Rundreise minimaler Fläche, wobei die Gesamtfläche der Vereinigung der n Kreise mit Durchmesser der Kanten dieser Rundreise entspricht. Die konstante Faktor Approximation, die wir für dieses Problem erhalten, basiert auf dem Ergebnis des *travelling salesman problems* mit einer parametrisierten Dreiecksungleichung [3].

2 MST ist eine Approximation um einen konstanten Faktor für MAST

Gegeben sei eine n-elementige Punktmenge P in der Ebene und irgendein Spannbaum T von P. Für jede Kante e des Spannbaumes T bezeichne mit $D(e)$ den Kreis mit Durchmesser e. Setze $\mathcal{D}(T) = \{D(e) | e \ ist \ Kante \ in \ T\}$, $\bigcup_T = \bigcup_{e \in T} D(e)$, und $\sigma_T = \sum_{e \in T} area(D(e))$. Weiter sei MST ein minimaler Spannbaum von P.

In diesem Kapitel der Ausarbeitung wird gezeigt, daß der minimale Spannbaum einer Punktmenge P eine konstante Faktor Approximation für den *Minimum-Area Spanning Tree* (MAST) ist.
Genauer, $area\left(\bigcup_{MST}\right) = O\left(area\left(\bigcup_{OPT}\right)\right)$, wobei OPT ein optimaler Spannbaum bezüglich der Fläche und somit eine Lösung für MAST ist. In der folgenden Abbildung (Abb. 1) sehen wir, daß der Minimale Spannbaum von P nicht zwingend eine Lösung für den *Minimum-Area Spanning Tree* sein muss.

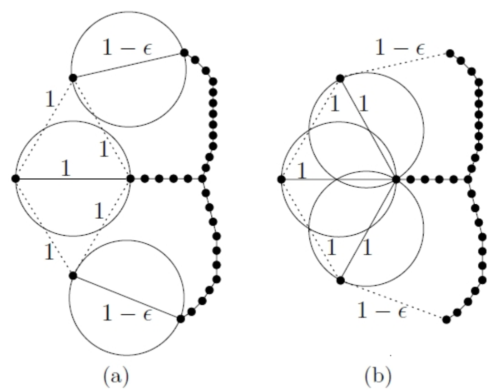

Abb.1. Ein Mimimum Spanning Tree ist nicht zwingend ein Minimum-Area Spanning Tree. (a) MST (b) MAST

Bevor wir uns mit der Approximation für MAST beschäftigen, wird zunächst folgende interessante Eigenschaft des MST vorgestellt. Die Lage eines jeden Punktes im Innern einer Zelle bezüglich der Anordnung der Kreise in D(MST) ist durch eine kleine Konstante beschränkt. Diese Eigenschaft folgt allerdings nicht sofort aus der Tatsache, daß der Grad des Minimalen Spannbaumes durch 6 beschränkt ist (siehe Abb. 2).

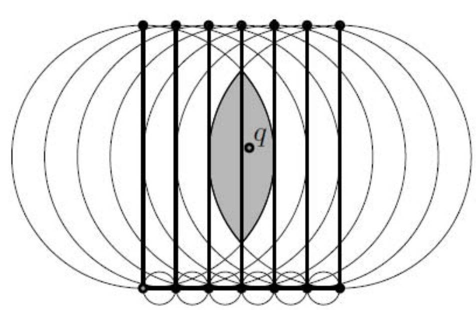

Abb.2. Ein Spannbaum T mit Grad 3 und einem Punkt q im Inneren einer Zelle eines Arrangements der Kreise in $D(T)$ der Tiefe O(n).

Sei im folgenden MST_p ein minimaler Spannbaum für $P \cup \{p\}$.

Behauptung 1 *Wir können annehmen, daß es keine Kante (a,b) im MST_p derart gibt, so daß (a,b) nicht im MST enthalten ist und sowohl a, als auch b Punkte von P sind.*

Beweis. Angenommen, es gäbe eine solche Kante (a,b) im MST_p. Wir betrachte nun den Pfad im MST zwischen a und b. Mindestens eine dieser Kanten entlang dieses Pfades liegt nicht im MST_p. Bezeichne diese Kante mit e. Dann gilt $|e| \leq |(a,b)|$, denn ansonsten hätte Kruskal's Algorithmus (a,b) ausgewählt. Deshalb können wir die Kante (a,b) im MST_p durch e ersetzen, ohne das Gesamtgewicht des Baumes zu erhöhen. □

Das aus dieser Behauptung folgende Resultat ist, daß wir annehmen können, daß wenn e eine Kante im MST_p, aber nicht im MST ist, dann ist p einer der Endpunkte von e.
Aber nun zurück zur Eigenschaft des MSTs, welche uns folgendes Lemma liefert.

Lemma 1 $\sigma_{MST} \leq 6 \cdot area\,(\bigcup_{MST})$.

Zur Erinnerung:

$$\sigma_{MST} = \sum_{e \in MST} area(D(e))$$

$$\bigcup_{MST} = \bigcup_{e \in MST} D(e)$$

Beweis. Wir zeigen, daß p zu höchstens 6 Kreisen in D(MST) gehört. Sei $D(q_1, q_2)$ ein Kreis in D(MST), so daß $p \in D(q_1, q_2)$. Bedenke, daß der Punkt p nicht auf dem Rand von $D(q_1, q_2)$ liegt, weil p nach Definition im Innern einer Zelle des Arrangements der Kreise in D(MST) liegt. Wir zeigen jetzt, daß die Kante (q_1, q_2) nicht im MST_p enthalten ist.
Angenommen (q_1, q_2) wäre Teil von MST_p, dann enthält einer der Pfade von q_1 nach p oder von q_2 nach p die Kante (q_1, q_2) (aber nicht beide). Wir nehmen an, daß z.B. der Pfad von q_1 nach p die Kante (q_1, q_2) enthält. Gerade weil (q_1, p) kleiner ist als (q_1, q_2) (p liegt ja im Inneren des Kreises mit Durchmesser $|q_1 q_2|$), können wir das Gesamtgewicht des MST_p verringern, indem wir (q_1, q_2) im MST_p durch (q_1, p) ersetzen. Wir schließen daraus, daß (q_1, q_2) nicht im MST_p enthalten ist. Wegen der vorangegangenen Behauptung wissen wir, daß jeder Kreis $D \in D(MST)$, mit $p \in D$, eine eigene Kante im MST_p induziert, die mit p verbunden ist. Aber der Grad von p ist höchstens 6 (dies ist immer wahr für jeden Eckpunkt eines euklidischen MST), also können höchstens 6 Kreise p überdecken. □

Bemerkung 1 *Der Grad eines minimalen Spannbaumes ist durch 6 beschränkt (siehe Abb.2).*

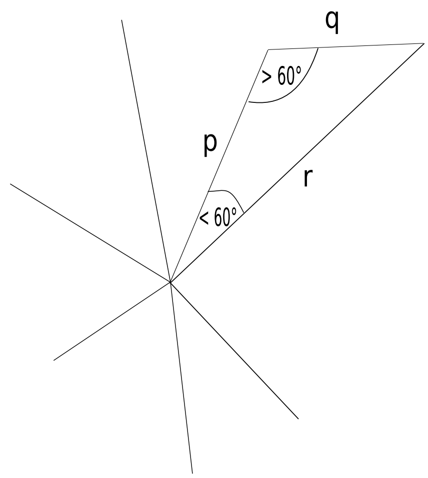

Abb.3. Der Grad des Minimalen Spannbaumes ist durch 6 begrenzt.

Diese Aussage ist leicht zu sehen. Angenommen der Grad des MST wäre an einem Punkt größer gleich 7. Dann würde aber unter all den Kanten, die sich in diesem Punkt schneiden, ein Winkel existieren mit Grad kleiner als 60°. Wenn dem so ist, gibt es aber in dem durch die Kanten p, q und r aufgespannten Dreiecks auch einen Winkel mit Grad größer als 60°. Wir machen uns jetzt folgende Eigenschaft eines Dreiecks zu nutze: Der größte Winkel im Dreieck liegt der längsten Kante des Dreiecks gegenüber. Wir wissen also, daß die Kante q in jedem Fall kürzer ist, als die Kante r und müssen daher r durch q ersetzen, um tatsächlich einen MST zu erhalten.

Bezeichne mit OPT wieder einen optimalen flächenminimalen Spannbaum einer Punktmenge P, d.h. OPT ist eine Lösung von MAST. In dem folgenden Verfahren wird OPT verwendet, um bezüglich der Kantenlänge einen nichtminimalen Spannbaum, ST, von P zu konstruieren:

Initial sei ST leer

1.Iteration: Sei e_1 eine längste Kante in OPT. Zeichne zwei konzentrische Kreise C_1 und C_1^3 um den Mittelpunkt von e_1 mit den Durchmessern $|e_1|$ bzw. $3|e_1|$. Berechne mit Hilfe von Kruskals Algorithmus [5] einen MST der Punkte von P, die in C_1^3 liegen. Immer dann, wenn eine Kante vom Algorithmus ausgewählt wird, wird sie sofort zu ST hinzugefügt (siehe Abbildung 4). S_1 bezeichnet die Menge an Kanten, die in der ersten Iteration zu ST hinzugefügt wurden.

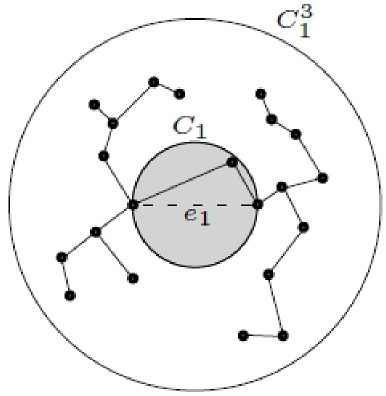

Abb.4. Der Spannbaum ST, nachdem e_1 ausgewählt wurde.

2.Iteration: Jetzt sei e_2 eine längste Kante in OPT, so daß sich wenigstens einer ihrer Endpunkte außerhalb von C_1^3 befindet. Zeichne zwei konzentrische Kreise C_2 und C_2^3 um den Mittelpunkt von e_2 mit den Durchmessern $|e_2|$ und $3|e_2|$. Wir verwenden jetzt eine kleine Modifikation von Kruskals Algorithmus, um einen Spannbaum der Punkte, die in C_2^3 liegen, zu berechnen: Die nächste Kante in der sortierten Liste von möglichen Kanten wird nur dann vom Algorithmus ausgewählt und zu ST hinzugefügt, wenn sie noch nicht in ST enthalten ist und dessen Hinzufügen zu ST keinen Zyklus in ST produziert(siehe Abbildung 5). Bezeichne mit S_2 die Menge der Kanten, die in diesem Schritt zu ST hinzugefügt wurden.

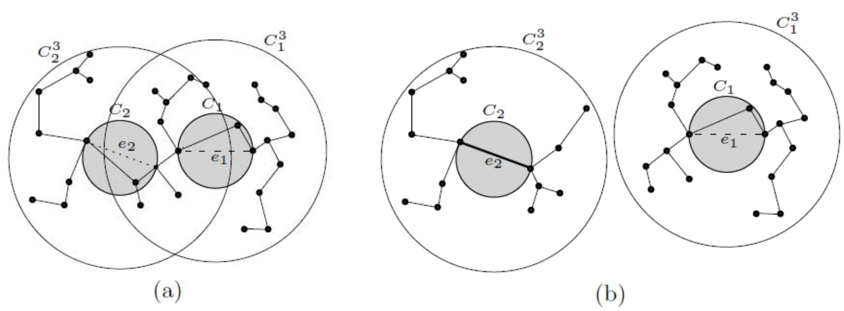

Abb.5. ST nachdem e_1 und e_2 ausgewählt wurden. (a) Einer der Endpunkte von e_2 liegt in C_1^3. (b) Beide Endpunkte von e_2 liegen außerhalb von C_1^3.

i-te Iteration: Sei e_i eine längste Kante in OPT, so daß bisher kein Pfad in ST zwischen den jeweiligen Endpunkten existiert. Zeichne zwei konzentrische Kreise C_i und C_i^3 um den Mittelpunkt von e_i und wende wieder Kruskal's modifizierten Algorithmus auf die Punkte von P an, die in C_i^3 liegen. Bezeichne mit S_i die Menge an Kanten, die in dieser Iteration zu ST hinzugefügt wurden.

Der Prozess endet, wenn für jede Kante e in OPT bereits ein Pfad in ST zwischen den Endpunkten von e existiert.

Behauptung 2 *Für jedes i ist S_i eine Untermenge der Kantenmenge des minimalen Spannbaums MST_i, die mit Hilfe von Kruskals Algorithmus (ohne obige Modifikation), angewandt auf die Punkte in C_i^3, gewonnen wurde.*

Beweis. Sei e eine Kante, die in der i-ten Iteration zu ST hinzugefügt wurde. Falls e nicht von Kruskals Algorithmus ohne obige Modifikation ausgewählt wurde, dann nur, weil bezüglich e schon ein Pfad zwischen seinen zwei Endpunkten in MST_i existiert (und zwar zu dem Zeitpunkt, wenn e betrachtet wird). Dies aber impliziert, daß e nicht zu ST hinzugefügt werden konnte, weil jede Kante in MST_i entweder schon zu ST hinzugefügt oder eben nicht zu ST hinzugefügt wurde, da bereits ein Pfad in ST zwischen zwei Punkten existiert. Deshalb hätte die Kante e verworfen werden sollen, wenn e von dem modifizierten Algorithmus betrachtet wird. Wir schließen daraus, daß e in MST_i enthalten sein muss. □

Behauptung 3 *ST ist ein Spannbaum von P.*

Beweis. Da nur Kanten, die keinen Zyklus in ST erzeugen, zu ST hinzugefügt werden (nach unserer modifizierten Version von Kruskal's Algorithmus), gibt es keine Zyklen in ST. Außerdem ist ST zusammenhängend, denn andernfalls gäbe es noch eine Kante in OPT, die eine weitere Iteration des Konstruktionsalgorithmus bewirkt. □

Bezeichne mit C die Menge der Kreise $C_1, ..., C_k$, und mit C^3 die Menge der Kreise $C_1^3, ..., C_k^3$, wobei k die Anzahl der Stufen der Iteration in der Konstruktion von ST ist.

Behauptung 4 *Für jedes Kreispaar C_i, C_j in C, mit $i \neq j$, gilt, daß $C_i \cap C_j = \emptyset$.*

Beweis. Sei C_i irgendein Kreis in C. Es ist zu zeigen, daß für jeden Kreis $C_j \in C$ gilt, daß $C_i \cap C_j = \emptyset$, für $i > j$. Aus der Konstruktion von ST folgt, daß $|e_j|$, der Durchmesser von C_j, kleiner oder gleich $|e_i|$, also dem Durchmesser von C_i, ist. Außerdem liegt wenigstens einer der Endpunkte von e_j außerhalb von C_i^3 (wenn beide Endpunkte von e_j in C_i^3 liegen würden, dann müßte bereits am Ende der i-ten Iteration ein zusammenhängender

Pfad zwischen diesen Endpunkten in ST existieren). Somit kann C_j, dessen Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt von e_j übereinstimmt, C_i nicht schneiden.

$\square$

Behauptung 5 $\sigma_{ST} = O(area(\bigcup_{OPT}))$

Zur Erinnerung:

$$\sigma_{ST} = \sum_i \sigma_{S_i}$$

$$\sigma_{S_i} = \sum_{e \in S_i} area(D(e))$$

$$area(\bigcup_{OPT}) = area(\bigcup_{e \in OPT} D(e))$$

Beweis. Wir zeigen zunächst durch die unten stehende Abfolge von Ungleichungen, daß $\sigma_{S_i} = O(area(C_i))$.

$$\sigma_{S_i} \leq^1 \sigma_{MST_i} \leq^2 6 \cdot area(\bigcup_{MST_i}) =^3 O(area(C_i^3)) =^4 O(area(C_i)).$$

Die erste Ungleichung folgt direkt aus Behauptung 2, denn für jedes i ist S_i eine Untermenge der Kantenmenge von MST_i. Die zweite Ungleichung wurde in Lemma 1 bewiesen. Betrachten wir jetzt die dritte Gleichung. Da alle Kanten im MST_i in C_i^3 enthalten sind, bedeutet das, daß $\bigcup_{MST_i}$ in einem Kreis enthalten ist, der durch die Vergrößerung von C_i^3 durch einen konstanten Faktor (also z.B. dem maximalen Abstand zweier Punkte aus der Punktmenge P) gewonnen wurde.

Es folgt,

$$area(\bigcup_{MST_i}) = O(area(C_i)).$$

Also gilt,

$$\sigma_{ST} = \sum_i \sigma_{S_i} = \sum_i O(area(C_i)).$$

Aber nach Behauptung 4, also der Tatsache, daß die Kreise $C_i \in C$ keinen gemeinsamen Schnitt haben, ist die letzte Ausage gleichwertig mit $O(area(\bigcup_C))$. Auf Grund der Tatsache, daß C eine Untermenge von OPT ist, denn die jeweiligen Durchmesser der Kreise $C_i \in C$ bilden eine echte Teilmenge Kanten aus OPT, gilt:

$$\sigma_{ST} = O(area(\bigcup_{OPT})).$$

$\square$

Jetzt kann das Hauptresultat dieser Ausarbeitung vorgestellt werden.

Theorem 1 *MST ist eine konstante Faktor Approximation für MAST, d.h.* $area(\bigcup_{MST}) \leq c \cdot area(\bigcup_{OPT})$*, für irgendeine Konstante c.*

Beweis.

$$area(\bigcup_{MST}) \leq^1 \sigma_{MST} \leq^2 \sigma_{ST} \leq^3 c \cdot area(\bigcup_{OPT})$$

Die erste Ungleichung ist trivial. Die zweite Ungleichung gilt für jeden Spannbaum von P; d.h. für jeden Spannbaum T ist $\sigma_{MST} \leq \sigma_T$. (Auch wenn die Länge $|e|$ der Kanten durch Gewichte $\pi|e|^2/2$ ersetzt werden, bleibt der MST erhalten, da sich an der Sortierung der Kantenlängen nach ihrer Größe nichts ändert. Die dritte Ungleichung wurde in Behauptung 5 bewiesen. □

3 MST ist eine Approximation um einen konstanten Faktor für MARA

Über den minimale Spannbaum einer Punktmenge P erhalten wir eine Darstellung der Punkte aus P, wobei jeder Kreis mit Mittelpunkt $p \in P$ für die Übertragungsreichweite eines Senders p steht. Sei jetzt $p_i \in P$ und r_i eine längste Kante im MST, die verbunden ist mit p_i. Folglich ergibt sich durch r_i der Abstand von p_i zu dem am weitest entfernten Nachbarn p_j. Setze $RA = \{D_{p_1}, ..., D_{p_n}\}$, wobei D_{p_i} der Kreis mit Radius r_i ist, mit p_i als Zentrum.

In einer Region $D_{p_1}, ..., D_{p_n}$, in der verschiedene Transmitter[3] stehen, ist die Anwesenheit eines Fremdempfängers unerwünscht, da dieser die Sendebereiche der einzelenen Transmitter stören kann. Es ist also nötig, die Sendebereiche den Transmittern so zuzuordnen, daß zum einen der resultierende Kommunikationsgraph zusammenhängend und zum anderen die Fläche der Vereinigung der Kreise $D_{p_1}, ..., D_{p_n}$ minimal ist.

In diesem Kapitel wird das Hauptergebnis von Kapitel 2 verwendet (MST ist eine *konstante Faktor Approximation* für MAST), um zu zeigen, daß die Bestimmung der Übertragungsreichweiten, die sich ja durch die Konstruktion des MST's ergeben, eine konstante Faktor Approximation für das *Minimum Area Range Assignment* (MARA) Problem ist, bei dem es darum geht, daß

(i) der entsprechende (gerichtete) Kommunikationsgraph [4] stark zusammenhängend und

[3]Transmitter verbreiten ein beliebiges Audiosignal in näherem Umfeld auf einer ganz bestimmten Frequenz.

[4]Ein Kommunikationsgraph ergibt sich dadurch, daß eine gerichtete Kante von $p_i \in P$ nach $p_j \in P$ dann und nur dann vorhanden ist, wenn p_j im Kreis D_{p_i} mit Mittelpunkt p_i liegt, wobei der Radius r_i von D_{p_i} dem Sendebereich p_i zugeordnet ist.

(ii) die Fläche der Vereinigung der Kreise von RA durch ein konstantes Vielfaches von der Fläche der Vereinigung der *Übertragungskreise* einer optimalen Reichweitenbestimmung (also eine Lösung für MARA) beschränkt ist.

Die erste Forderung für den MST wurde schon von Kirousis et al. [10] bewiesen, der gezeigt hat, daß die Reichweitenbestimmung, induziert durch einen MST, eine 2-Approximation für das *standard range assignment* Problem ist.

Sei nun OPT^R eine optimale Reichweitenbestimmung der jeweiligen Transmitter, also eine Lösung für MARA. Es bleibt nur noch die zweite Bedingung zu zeigen.

Behauptung 6 $area(\bigcup_{RA}) \leq 9 \cdot area(\bigcup_{MST})$

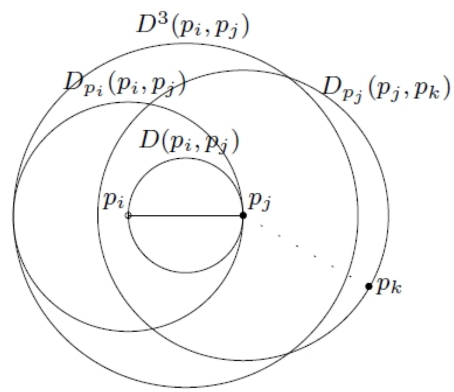

Abb.6. $(p_i, p_j) \in MST$; $D(p_i, p_j) \in D(MST)$; $D_{p_i}(p_i, p_j)$,$D_{p_j}(p_j, p_k) \in RA$; $D^3(p_i, p_j) \in D^3(MST)$.

Beweis. Wir definieren eine zusätzliche Menge an Kreisen (siehe Abb. 6):

$D(p_i, p_j)$ ist der Kreis mit Durchmesser $|p_i p_j|$

$D_{p_i}(p_i, p_j)$ ist der Kreis mit Radius $|p_i p_j|$ und Mittelpunkt p_i

$D_{p_j}(p_j, p_k)$ ist der Kreis mit Radius $|p_j p_k|$ und Mittelpunkt p_j

$D^3(p_i, p_j)$ ist der Kreis mit Durchmesser $3|p_i p_j|$ und Mittelpunkt $\frac{p_i+p_j}{2}$

Für jede Kante e im MST, zeichne jetzt einen Kreis mit Durchmesser $3|e|$, zentriert auf den Mittelpunkt von e. Sei $D^3(MST)$ die Menge dieser n-1 Kreise. Wir stellen fest, daß $area(\bigcup_{RA}) \leq area(\bigcup_{D^3(MST)})$, da für jedes $p_i \in P$, $D_{p_i} = D_{p_i}(p_i, p_j)$ für einige Punkte $p_j \in P$, die (im MST) mit p_i

durch eine Kante verbunden sind, und $D_{p_i}(p_i, p_j)$ ist, nach Konstruktion, im Kreis $D^3(MST)$ enthalten.
Letzten Endes ist klar, daß $area(\bigcup_{D^3(MST)}) \leq 9 \cdot area(\bigcup_{MST})$. □

Theorem 2 *RA ist eine konstante Faktor Approximation für MARA, d.h.* $area(\bigcup_{RA}) \leq c' \cdot area(\bigcup_{OPT^R})$*, für irgendeine Konstante c'.*

Beweis. Der Beweis basiert auf der Beobachtung, daß der (gerichtete) Kommunikationsgraph OPT^R einen Spannbaum enthält, und dem Hauptergebnis aus Kapitel 2.
Sei p irgendein Punkt aus P. Wir konstruieren einen Spannbaum T von P wie folgt: Für jeden Punkt $q \in P$, $q \neq p$, berechne einen kürzesten (bezüglich der Anzahl der Teilstrecken) gerichteten Pfad von q nach p und füge die Kanten in diesem Pfad zu T hinzu. Jetzt mache alle gerichteten zu ungerichteten Kanten. Dies kann mit Hilfe der Adjazenzmatrix realisiert werden. Wir müssen nur an jeder Stelle in der Matrix, an der eine Knotenbeziehung festgehalten wird, anstelle der Knotenbezeichnug eine 1 eintagen (1 steht dafür, daß der i-te und j-te Knoten benachbart sind). Klar ist, T ist ein Spannbaum von P. Für jede Kante (p_i, p_j) in T ist der Kreis $D(p_i, p_j)$ entweder im Übertragungskreis $D_{p_i}(p_i, p_j)$ von p_i (in OPT^R), oder im Übertragungskreis $D_{p_j}(p_i, p_j)$ von p_j (in OPT^R) enthalten (siehe Abb. 6). Daher gilt: $\bigcup_T \subseteq \bigcup_{OPT^R}$. Die folgenden Ungleichungen vervollständigen den Beweis. (OPT bezeichnet eine Lösung von MAST).

$$area(\bigcup_{RA}) \leq^1 9 \cdot area(\bigcup_{MST}) \leq^2 9c \cdot area(\bigcup_{OPT}) \leq^3 9c \cdot area(\bigcup_{T}) \leq^4 9c \cdot area(\bigcup_{OPT^R}).$$

Die erste Ungleichung folgt aus Behauptung 6; die zweite Ungleichung folgt aus Theorem 1; die Dritte Ungleichung folgt aus der Definition von OPT; die vierte Ungleichung wurde oben gezeigt. □

4 MST ist eine Approximation um einen konstanten Faktor für MACDG

Über den minimale Spannbaum erhalten wir eine Zuordung der Radien zu den Punkten aus P. Sei $p_i \in P$ und r_i die längste Kante im MST, verbunden mit p_i. Weiter sei $r_i/2$ der zu p_i gehörige Radius. Setze nun $DG = \{D_{p_1}, ..., D_{p_n}\}$, wobei D_{p_i} der Kreis mit Radius $r_i/2$ und Zentrum p_i ist.
In diesem Kapitel verwenden wir wieder unser Hauptergebnis aus Kapitel 2, um zu zeigen, daß DG eine konstante Faktor Approximation für den *Minimum-Area Connected Disc Graph* (MACDG) ist. Das bedeutet

(i) wenn wir DG als Schnittgraph betrachten, ist DG zusammenhängend und

(ii) die Fläche der Vereinigung der Kreise in DG ist begrenzt durch ein konstantes Vielfaches von der Fläche der Vereinigung der Kreise einer optimalen Anordnung der Radien, also eine Lösung von MACDG.

Die erste Bedingung ist eindeutig, da jede Kante im MST auch eine Kante in DG ist. Sei OPT^D eine optimale Zuordnung der Radien, also eine Lösung von MACDG.
Es verbleibt die zweite oben stehende Bedingung zu zeigen.

Theorem 3 *DG ist eine konstante Faktor Approximation für MACDG, d.h.* $area(\bigcup_{DG}) \leq c'' \cdot area(\bigcup_{OPT^D})$*, für irgendeine Konstante* c''*.*

Beweis. Wir behaupten zunächst, daß $area(\bigcup_{DG}) \leq 9 \cdot area(\bigcup_{MST})$. Dies folgt direkt aus Behauptung 6, denn die Radien der Kreise in DG sind nach Definition nur halb so groß, wie die Radien der Kreise in RA, also gilt $\bigcup_{DG} \subseteq \bigcup_{RA}$. Als nächstes stellen wir fest, daß wenn man den Radius von jedem Kreis in OPT^D verdoppelt, dann enthält die resultierende Menge an Kreisen die Kreismenge eines Spannbaumes T von P. Nach Theorem 1 gilt:

$$area(\bigcup_{MST}) \leq c \cdot area(\bigcup_{OPT^D})$$

Zur Vervollständigung des Beweises müssen nur noch die zwei Ungleichungen zusammenfügt werden:

$$area(\bigcup_{DG}) \leq 9 \cdot area(\bigcup_{MST}) \leq c \cdot area(\bigcup_{OPT^D})$$

□

5 MST ist eine Approximation um einen konstanten Faktor für MAT

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit einer Variante des Travelling Salesman[5] Problems. Zu einer gegebenen Punktmenge wollen wir auch hier eine Rundreise finden, allerdings eine minimaler Fläche. Die einzelnen Flächen ergeben sich, wenn wir für jede Kante einen Kreis mit Durchmesser dieser Kante ziehen. Betrachten wir jetzt den vollständigen durch P induzierten Graphen. Wir bestimmen Gewichte an den Kanten des Graphen, so daß das Gewicht w(e) einer Kante e gleich $|e|^2$ ist und bezeichnen diesen Graphen mit G^2. Weiter definieren wir zu einer Untermenge F von G^2 das Gewicht $w(F)$, das die Summe der Gewichte der Kanten in F bildet. Wichtig an

[5]Die Lösung des TSP besteht darin, eine Reihenfolge für den Besuch mehrerer Orte so zu wählen, dass die gesamte Reisestrecke nach der Rückkehr zum Ausgangsort möglichst kurz ist.

dieser Stelle ist zu erwähnen, daß die *Dreiecksungleichung*[6]in G^2 im Allgemeinen nicht gilt. Allerdings gilt die Dreiecksungleichung immer in folgender Form: $|uv|^2 \leq 2 \cdot \left(|uw|^2 + |wv|^2\right)$. Für Distanzfunktionen der Art $dist(u,v) \leq \tau \cdot (dist\,(u,w) + dist\,(w,u))$ mit Parameter τ sind für das TSP Algorithmen mit einer konstanten Faktor Approximation bekannt: Andreae und Bandelt [3] stellten eine $\left(3\tau^2/2 + \tau/2\right)$-Approximation vor, die von Andrea [2] zu einer $\tau^2 + \tau$-Approximation verfeinert wurde, und Bender und Chekuri [4] entwickelten eine 4-Approximation. Für frei wählbare (symmetrische) Abstände gibt es für das TSP allerdings keine Approximation. Diese äußerst negative Aussage folgt, wenn man das Problem darauf reduziert, einen *Hamiltonkreis*[7] in einem Graphen zu finden.
In unserem Fall, $(\tau = 2)$, ergibt sich eine 6-Approximation. Andrea und Bandelt berechneten sogar eine Rundreise T in G^2, so daß $w(T) \leq c \cdot w(MST_{G^2})$, wobei MST_{G^2} ein minimaler Spannbaum von G^2 und c irgendeine Konstante ist.
Im Folgenden wird nun gezeigt, daß T eine konstante faktor Approximation für das *Minimum-Area Tour* (MAT) Problem ist.
Für eine Kante e in T, bezeichne mit D(e) den Kreis mit Durchmesser e.
Wir setzen

$$\mathcal{D}(T) = \{D(e) | e\ ist\ Kante\ in\ T\}$$

$$\bigcup_T = \bigcup_{e \in T} D(e)$$

$$\sigma_T = \sum_{e \in T} area(D(e))$$

Sei OPT^T nun eine optimale Rundreise, also eine Lösung für MAT. Es ist klar, daß $area\left(\bigcup_{OPT^T}\right) \geq area\left(\bigcup_{OPT^S}\right)$, wobei OPT^S eine Lösung für das *Minimum Area Spanning Tree* Problem aus Kapitel 2 ist.
Wir müssen zeigen, daß $area\left(\bigcup_T\right) = O\left(area\left(\bigcup_{OPT^T}\right)\right)$.
So gilt

$$area(\bigcup_T) \leq \sigma_T \leq w(T) \leq^3 c \cdot w\left(MST_{G^2}\right),$$

wobei in Ungleichung 3 ein hier nicht vorgestelltes Ergebnis aus der Arbeit von Andreae und Bandelt verwendet wird. Aber $w(MST_{G^2}) = \sum_{e \in MST} |e|^2$, wobei MST der minimale Spannbaum von P ist (da beide Bäume identisch bezüglich ihrer Kanten sind). Also folgt

$$area(\bigcup_T) = O(\sum_{e \in MST} |e|^2) = O(\sigma_{MST}) = O(area(\bigcup_{MST})),$$

[6] $dist(p,r) \leq dist(p,q) + dist(q,r)$, für alle $p,q,r \in X$ und einer Abstandsfunktion d.

[7] Ein Hamiltonkreis ist ein Kreis, der alle Knoten des Graphen enthält. Ein bekannter Spezialfall des Hamiltonkreisproblems ist das Problem des Handlungsreisenden, bei welchem nach einem kürzesten Hamiltonkreis in einem gerichteten Graphen mit Kantengewichten gefragt wird.

wobei sich die letzte Gleichung aus Lemma 1 ergibt.
Und nach dem Hauptergebnis aus Kapitel 2 gilt,

$$O(area(\bigcup_{MST}) = O(area(\bigcup_{OPT^S}) = O(area(\bigcup_{OPT^T})).$$

Das folgende Theorem faßt nun das Ergebnis dieses Kapitels zusammen.

Theorem 4 *T ist eine konstante Faktor Approximation für MAT, d.h. $area(\bigcup_T) \leq \hat{c} \cdot area(\bigcup_{OPT^T})$, für irgendeine Konstane $\hat{c}$.*

Literatur

[1] Paz Carmi, Matthew J. Katz and Joseph S. B. Mitchell. The Minimum-Area Spanning tree Problem [paper 2005]. Department of Computer Science, Ben-Gurion University of the Negev, Beer-Sheva 84105, Israel. Depatmnet of Applied Mathematics and Statistics, Stony Brook University, Stony Brook, NY 11794, USA.

[2] T. Andreae. On the traveling salesman problem restricted to inputs satisfying a relaxed triangle inequality. Tech. Report 74, Mathematisches Seminar, University of Hamburg, 1998.

[3] T. Andreae and H.-J. Bandelt. Performance guarantees for approximation algorithms depending on parameterized triangle inequalities. SIAM Journal of Discrete Mathematics, 8(1):1 16,1995.

[4] M. A. Bender and C. Chekuri. Performance guarantees for the tsp with a parameterizised triangle inequality. Inf. Process. Lett5., 73(1-2):17-21, 2000.

[5] Joseph Kruskal. On the shortest spanning subtree and the traveling salesman problem. In: Proceedings of the American Mathematical Society, 7 (1956), S. 48-50.

[6] A. E. F. Clementi, P. Penna, and R. Silvestri. On the power assignment problem in radio networks. Electronic Colloquium on Computational Complexity, 2000.

[7] L. M. Kirousis, E. Kranakis, D. Krizanc, and A. Pelc. Power consumption in packet radio networks. 14th Annual Sympos. Theoretical Aspects of Computer Science (STACS), LNCS 1200, 363 (374, 1997).