

RHEINISCHE FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT BONN
INSTITUT FÜR INFORMATIK I



Björn Sondermann

Paralleles Suchen auf m Strahlen

19. Dezember 2007

Seminararbeit im WS 2007/2008

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden Strategien zum parallelen Suchen eines Ziels auf m Strahlen durch m punktgroße Agenten betrachtet. Wir gehen davon aus, dass die Strahlen sternförmig von einem Punkt - dem Ursprung - ausgehen, und dass sich ein Ziel t auf einem dieser Strahlen im Abstand $D(t)$ befindet. Zudem befinden sich zu Beginn m punktgroße Agenten im Ursprung. Diesen Agenten ist es nicht möglich über Distanz zu kommunizieren. Das heisst, sie können nur dann Informationen austauschen, wenn sie sich auf dem selben Punkt des selben Strahls befinden. Das zu lösende Problem besteht nun darin, mit den Agenten nach dem Ziel zu suchen und mit allen Agenten zu diesem Ziel zu gelangen. Da die Agenten nicht über Entfernung kommunizieren können, müssen sie, wenn sie das Ziel kennen, die Information „persönlich“ an weitere Agenten übergeben, sodass alle Agenten zum Ziel gelangen können um das Problem zu lösen.

Verfolgen alle Agenten die selbe Strategie, um nach dem Ziel zu suchen, dann stellen wir die maximale Zeit die vergeht, bis alle Agenten, am Ziel eingetroffen sind, ins Verhältnis mit der Zeit, die ein Agent mindestens benötigt, um vom Ursprung zum Ziel zu gelangen - also mit Höchstgeschwindigkeit auf dem direkten Weg. Wir bezeichnen dieses Verhältnis als den kompetitiven Faktor der zu Grunde liegenden Strategie. Einen solchen kompetitiven Faktor gilt es für jede Klasse von Strategien zu untersuchen und eine untere Schranke dafür anzugeben. Wir zeigen: Ist ein Mindestabstand zwischen Ursprung und Ziel bekannt, gibt es eine einfache Strategie, die unabhängig von m einen kompetitiven Faktor von 9 erzielt. Wir untersuchen daraufhin zwei große Klassen von Strategien, und zeigen, dass bereits im Fall $m = 2$ eine untere Schranke von 9 existiert. Daraus folgern wir, dass diese untere Schranke von 9 für $m = 2$ auch eine untere Schranke von 9 für $m > 2$ impliziert.

Ist jedoch kein Mindestabstand zwischen Ursprung und Ziel bekannt, so zeigen wir eine untere Schranke für den kompetitiven Faktor von $1 + 2(k + 1)^{k+1}/k^k$ mit $k = \lceil \log m \rceil$. Danach stellen wir auch eine Strategie vor, die eben diesen kompetitiven Faktor besitzt.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung und Motivation	3
2	Definitionen und vorläufige Ergebnisse	5
3	Strategien mit Mindestabstand	7
3.1	Monotone Strategien auf 2 Strahlen	7
3.2	Symmetrische Strategien auf 2 Strahlen	11
3.3	Strategien auf m Strahlen	20
3.4	Die Doubling-Strategie	21
4	Strategien ohne Mindestabstand	21
4.1	Eine Strategie zur parallelen Suche auf m Strahlen	22
4.2	Untere Schranke für monotone Strategien	25
4.3	Untere Schranke für beliebige Strategien	29
5	Fazit	30

1 Einführung und Motivation

Das Problem des Suchens nach einem Ziel ist bereits in verschiedenen Varianten untersucht worden. Nicht ohne Grund, denn es ist ein Problem, welches nicht nur in der Robotik mehrfach Anwendung findet und daher ein wichtiges Problem der Informatik darstellt. Jedoch werden bei diesen verschiedenen Herangehensweisen auch unterschiedliche Anforderungen an die Strategien vorausgesetzt.

Die Suche eines Roboters oder ähnlichem nach einem Ziel kann als *Online*-Problem betrachtet werden, das bedeutet, alle Suchschritte bauen ausschliesslich auf den Informationen auf, die im Voraus bekannt waren und aus vorherigen Suchschritten bekannt wurden. Das heisst, die Suche kann sukzessiv verfeinert werden indem Informationen, die während der Ausführung gesammelt werden, für den weiteren Verlauf der Suche verwendet werden. Um die Effizienz einer Online-Such-Strategie S zu messen verwenden wir den kompetitiven Faktor C , den wir wie folgt definieren.

Definition 1

Sei eine Strategie S gegeben, und das Ziel t nicht bekannt. Dann ist mit

$$C_S := \max_t \left(\frac{T_S(D(t))}{T_{opt}(D(t))} \right)$$

der kompetitive Faktor der Strategie S bezeichnet.

Dabei bezeichnen wir die Zeit, die unter Verwendung von Strategie S benötigt wird, um das Ziel t zu finden und mit allen m Agenten zu erreichen mit T_S . Mit T_{opt} bezeichnen wir dagegen die Zeit, die ein Agent mit Höchstgeschwindigkeit benötigt, um die Strecke zwischen Ursprung und Ziel abzulaufen. Wir sagen, dass das die optimale Lösung des Problems darstellt, da die m Agenten nicht schneller zum Ziel gelangen können, um das Problem zu lösen.

Wichtig ist, dass wir beim kompetitiven Faktor immer das Maximum über alle möglichen Positionen des Ziels t angeben. So schließen wir aus, dass für jede Strategie jeweils nur günstige Positionen des Ziels betrachtet werden. Denn so können wir später keine untere Schranke festlegen.

Die Startsituation ist dabei die Folgende. Es existieren m sternförmig vom Ursprung ausgehende Strahlen. Auf einem dieser Strahlen befindet sich ein zu suchendes Ziel t in einem unbekannten Abstand $D(t)$. Ein punktförmiger Agent kann das Ziel nur dann erkennen, wenn er sich genau über dem Ziel befindet. Die Agenten können nur miteinander kommunizieren, wenn sie auf dem selben Punkt des selben Strahls stehen. Alle Agenten stehen zu Beginn im Ursprung. Ist ein Mindestabstand D_{min} zwischen Ursprung und Ziel zu Beginn gegeben, so kennt diesen jeder Agent und die Information, kann uneingeschränkt in der Strategie verwendet werden.

Haben wir für die Suche auf den m Strahlen nur einen Agenten zur Verfügung,

so haben S. Gal [2] sowie Baeza-Yates, Culberson, und Rawlins [5] gezeigt, dass es eine optimale Suchstrategie ist, die Strahlen in zyklischer Reihenfolge zu besuchen, und jedesmal die Schrittlänge auf dem jeweiligen Strahl um einen Faktor $m/(m-1)$ zu verlängern, wenn wir mit einer Schrittlänge von 1 auf dem ersten Strahl beginnen. Der kompetitive Faktor C_m , den wir durch diese Strategie erhalten, ist gegeben durch

$$1 + 2 \frac{m^m}{(m-1)^{m-1}}.$$

Aber dieses Verfahren funktioniert nur für einen Agent auf m Strahlen und betrachtet keine weiteren Agenten. Wir wollen uns jedoch mit der oberen und unteren Schranke des kompetitiven Faktors beim *parallelen Absuchen* von m Strahlen beschäftigen, d.h. es suchen gleichzeitig mehrere Agenten nach dem Ziel. Dieses Problem wurde bereits früher in zwei Zusammenhängen behandelt.

Im ersten Zusammenhang haben Kao, Ma, Siper und Yin [3] die Online-Konstruktion von hybriden (bzw. genetischen) Algorithmen mit folgenden Voraussetzungen betrachtet: Es seien ein Problem Q und m Ansätze es zu lösen gegeben. Jeder Ansatz ist durch einen Algorithmus beschrieben, den wir den *Basis-Algorithmus* nennen. Wir haben zudem einen Computer mit $k \leq m$ disjunkten Speicherbereichen, die jeweils dazu verwendet werden können einen Basis-Algorithmus ablaufen zu lassen und dessen Ergebnis zu speichern. Zu jedem Zeitpunkt kann nur ein Algorithmus auf dem Computer ablaufen. Im Vorhinein ist nicht bekannt, welcher Algorithmus das Problem Q lösen wird. Wir nehmen aber an, dass mindestens einer es lösen kann. Jedoch wissen wir auch nicht, nach welcher Zeit dieser Algorithmus das Problem gelöst haben wird. Im worst case löst nur ein Ansatz das Problem und alle anderen Algorithmen halten nicht an. Eine Möglichkeit, Q zu lösen ist es einen genetischen Algorithmus zu konstruieren, der die Basis-Algorithmen auf folgende Weise verwendet. Ein Basis-Algorithmus läuft für eine bestimmte Zeit auf dem Computer, dann wird zu einem anderen Basis-Algorithmus gewechselt, u.s.w. bis Q gelöst wurde. Wenn $k < m$ gilt, dann ist nicht genug Speicher vorhanden, um alle Zwischenergebnisse zu speichern. Also muss von Zeit zu Zeit ein Lösungsansatz verworfen und später gegebenenfalls von vorne gestartet werden.

Eine andere Sicht auf dieses Problem, wäre es anzunehmen, dass wir k Agenten gegeben haben, die auf m Strahlen nach einem Ziel t suchen. Auch hier nehmen wir an, dass $k < m$ gilt. Dabei korrespondiert jeder Strahl mit einem Basis-Algorithmus und ein Agent mit einem Speicherbereich. Zu jedem Zeitpunkt darf nur genau ein Agent bewegt werden. Einen Lösungsansatz A zu verwerfen und einen anderen Ansatz zu versuchen bedeutet in diesem Fall, einen Agent auf dem Strahl der mit A korrespondiert, zurück zum Ursprung laufen zu lassen und auf einen anderen Strahl zu schicken, der mit einem anderen Algorithmus korrespondiert. Kao *et al.* [3, 7] präsentieren einen Al-

gorithmus für oben genanntes Problem, der einen optimalen kompetitiven Faktor von

$$k + 2 \frac{(m - k + 1)^{m-k+1}}{(m - k)^{m-k}}$$

erzielt, was den optimalen kompetitiven Faktor für das Problem, mit k Agenten auf m Strahlen ein Ziel zu suchen, darstellt, wenn sich zu jedem Zeitpunkt nur ein Agent bewegen darf.

Im zweiten Zusammenhang sucht eine Gruppe von m punktgroßen Agenten nach dem Ziel t . Wieder ist weder bekannt, auf welchem Strahl noch in welchem Abstand zum Ursprung sich das Ziel befindet. Nun müssen alle Agenten das Ziel erreichen und können nur kommunizieren, wenn sie die selbe Position teilen. Wir werden im Folgenden dieses Modell als zugrundeliegend betrachten. Baeza-Yates und Schott [1] betrachten Suchstrategien auf der Zahlengerade der reellen Zahlen, das bedeutet $m = 2$. Sie präsentieren zwei Strategien, die jeweils einen kompetitiven Faktor von 9 erzielen.

In dieser Seminararbeit, die der Veröffentlichung von Hammar, Nilsson und Schuierer [4] folgt, untersuchen wir Suchstrategien, wo auf m Strahlen parallel von auch m vielen Agenten nach einem Ziel gesucht werden kann. Das heisst, hier können sich alle Agenten zur selben Zeit bewegen. Wenn zusätzlich eine untere Schranke für den Abstand zwischen Ursprung und Ziel bekannt ist, dann gibt es eine einfache Strategie, die unabhängig von m einen kompetitiven Faktor von 9 besitzt. Wir zeigen, dass auch im Fall $m = 2$ der kompetitive Faktor zweier großer Klassen von Strategien jeweils eine untere Schranke von 9 besitzt. Darüber hinaus zeigen wir auch, dass für alle diese Strategien gilt: Eine untere Schranke des kompetitiven Faktors von 9 im Fall $m = 2$ impliziert eine untere Schranke für den kompetitiven Faktor von 9 für Strategien, die das Problem für $m > 2$ lösen.

Ist jedoch kein Mindestabstand zu Beginn gegeben, zeigen wir, dass dann eine untere Schranke von $1 + 2(k + 1)^{k+1}/k^k$, mit $k = \lceil \log m \rceil$, für den kompetitiven Faktor existiert.

2 Definitionen und vorläufige Ergebnisse

In diesem Kapitel wollen wir zunächst ein paar Definitionen aufstellen und ein paar vorläufige Ergebnisse ansehen. Dann betrachten wir drei Strategien, mittels denen man auf einer Geraden ($m = 2$) ein Ziel mit dem kompetitiven Faktor von 9 finden und von allen Agenten besuchen kann. Danach zeigen wir, dass eine der Strategien sogar dazu verwendet werden kann, um auf $m > 2$ Strahlen mit dem selben kompetitiven Faktor das Ziel zu suchen und zu erreichen.

Bei den folgenden Betrachtungen gilt, dass wir eine Gruppe von m Agenten haben, die auf einem vom Ursprung ausgehenden Stern von m Strahlen einen Zielpunkt suchen sollen, worüber weder bekannt ist, auf welchem

Strahl er sich befindet, noch in welchem Abstand zum Ursprung. Alle Agenten haben die selbe Höchstgeschwindigkeit, die wir o.B.d.A. auf 1 Längeneinheit pro Zeiteinheit festlegen. Die Beschränkung der Geschwindigkeit ist sinnvoll, da ein unendliches Anwachsen der Geschwindigkeit eine beliebige Reduktion der Zeit zum Auffinden des Ziels bedeuten würde. Wir sagen, die Geschwindigkeit eines Agenten ist positiv, wenn er sich vom Ursprung weg bewegt, und negativ, wenn er sich auf den Ursprung zu bewegt.

Sei nun S eine Strategie, um parallel auf den m Strahlen nach dem Zielpunkt zu suchen. Dann bezeichnen wir mit $T_S(D)$ die maximale Zeit, die von der Gruppe von Agenten unter Verwendung von Strategie S benötigt wird, um das Ziel im Abstand D vom Ursprung zu finden und zu besuchen. Da wir die Höchstgeschwindigkeit auf eins gesetzt haben, ist die Zeit, die benötigt wird um zum Ziel zu gelangen wenn der Ort bekannt ist, D Zeiteinheiten. Der bereits definierte kompetitive Faktor lässt sich nun vereinfacht schreiben als das Maximum von $T_S(D)/D$ über alle $D \geq 0$. In manchen Fällen wollen wir auch den Fall betrachten, dass ein minimaler Abstand D_{min} des Ziels zum Ursprung eingehalten werden soll und im Vorhinein bekannt ist. Wir können in diesem Fall, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, annehmen, dass $D_{min} = 1$. Auch das können wir o.B.d.A., denn wir können die Längeneinheiten genauso festlegen. Es wird sich später zeigen, dass die Existenz von D_{min} zu einem bedeutend kleinerem kompetitiven Faktor für $m > 2$ führen wird.

Nun wollen wir, wie bereits angekündigt, drei unterschiedliche Klassen von Strategien zur parallelen Suche auf m Strahlen definieren.

Definition 2

Wir bezeichnen eine Strategie als

- *monoton*, wenn zu jeder Zeit alle Agenten, die nicht wissen wo sich das Ziel befindet, nicht-negative Geschwindigkeit haben,
- *full-speed*, wenn sich zu jeder Zeit alle Agenten mit einer Geschwindigkeit von 1 oder -1 bewegen, und
- *symmetrisch*, wenn zu jeder Zeit alle Agenten, die nicht wissen wo sich das Ziel befindet, die selbe Geschwindigkeit haben, und sich auf paarweise verschiedenen Strahlen befinden.

Bei monotonen Strategien ist es noch sinnvoll vorauszusetzen, dass alle Agenten auf paarweise verschiedenen Strahlen nach dem Ziel suchen sollen, da andernfalls der kompetitive Faktor gegen Unendlich strebt.

Wir wollen nun als Beispiel zu jedem Typ den Fall $m = 2$ betrachten, um die Unterschiede schon jetzt zu verdeutlichen.

Wir betrachten zunächst eine monotone Strategie, in der sich jeder Agent mit der Geschwindigkeit $1/3$ auf einem eigenen Strahl fortbewegt, um das Ziel zu suchen. Nachdem ein Agent das Ziel t gefunden hat, läuft er mit

Höchstgeschwindigkeit $v_{\max} = -1$ zurück zum Ursprung und von dort mit $v_{\max} = 1$ weiter auf dem Strahl des anderen Agenten, um ihn einzuholen und die Information weiterzugeben. Da der Agent, in dem Zeitpunkt als er das Ziel gefunden hat die Strecke $2D$ vom anderen Agenten entfernt ist, und ihn mit Höchstgeschwindigkeit verfolgt, kann man die Verfolgung auch so betrachten, daß er die Strecke der Länge $2D$ mit der relativen Geschwindigkeit zum anderen Agenten von $2/3$ abläuft. Da später beide Agenten zurück zum Ziel laufen müssen, vergeht diese Zeit noch ein zweites Mal. Dies führt dann durch diese einfache Rechnung

$$C_S = \max_{D \geq D_{\min}} \frac{\frac{D}{1/3} + 2 \left(\frac{2D}{2/3} \right)}{D} = 3 + 2 \cdot 3 = 9$$

zu einem kompetitiven Faktor von 9. Die Strategie wird in [1] beschrieben. Im nächsten Kapitel beweisen wir eine untere Schranke von 9 für den kompetitiven Faktor aller monotonen Strategien.

symmetrische Full-Speed-Strategie ist es, wenn jeder Agent, zunächst eine Strecke absucht, dann zum Ursprung zurückkehrt und die zuvor abgesuchte Strecke verdoppelt und anschliessend wieder zum Ursprung zurückkehrt. Diese Strategie kann ausschliesslich dann angewendet werden, wenn im Vorhinein ein Mindestabstand zwischen Ziel und Ursprung bekannt ist. Der kompetitive Faktor dieser Strategie beträgt auch 9. Die Rechnung ist aber nicht so einfach, wie bei der monotonen Strategie. Daher wollen wir auf diese Strategie, die wir als Doubling-Strategie bezeichnen, am Ende des nächsten Kapitels (Seite 21) noch einmal eingehen, um den kompetitiven Faktor von 9 zu bestätigen.

3 Strategien mit Mindestabstand

Wie bereits erwähnt nehmen wir an, dass D nach unten durch $D_{\min} = 1$ beschränkt ist, d.h. eine untere Schranke $D_{\min}$ für den minimalen Abstand zwischen Ursprung und Ziel gegeben ist.

Einführend betrachten wir das parallele Suchproblem auf zwei Strahlen und beweisen eine untere Schranke des kompetitiven Faktors für monotone Strategien. Danach wollen wir symmetrische Strategien für den Fall $m = 2$ betrachten, bevor wir dann die Ergebnisse auf den Fall $m > 2$ ausweiten wollen und uns dann nochmals mit dem Beispiel der Doubling-Strategie beschäftigen.

3.1 Monotone Strategien auf 2 Strahlen

Wir betrachten im Folgenden die beiden Strahlen als den positiven und den negativen Teil der reellen Zahlengeraden, und platzieren die beiden Agenten

in den Ursprung auf die 0. Nun laufen beide Agenten jeweils monoton entlang ihres eigenen Strahls weg vom Ursprung. Erst wenn ein Agent das Ziel t gefunden hat, kehrt er um und reist mit Höchstgeschwindigkeit $v_{\max}$ zum anderen Agenten, um die Information über das Ziel weiterzugeben. Jetzt können beide Agenten mit $v_{\max}$ zurück zum Ziel laufen und das Problem wurde gelöst.

Seien $v_1(T)$ und $v_2(T)$ die Durchschnittsgeschwindigkeiten der beiden Agenten a_1 und a_2 bis zum Zeitpunkt T , bevor einer das Ziel t gefunden hat. Da es sich hier um eine monotone Strategie handelt, ist dies einfach der Abstand des jeweiligen Agenten zum Ursprung geteilt durch die Zeit T . Nur Agenten, die wissen wo sich das Ziel befindet, dürfen negative Geschwindigkeit haben. Daher ist klar, dass eine monotone Suchstrategie durch die beiden Funktionen $v_1(T)$ und $v_2(T)$ vollständig beschrieben wird. Wir haben im letzten Kapitel schon eine Strategie gesehen, die einen kompetitiven Faktor von 9 besitzt. Nun wollen wir zeigen, dass dies bereits eine untere Schranke für monotone Strategien ist.

Lemma 3 *Es existiert keine monotone Suchstrategie mittels der man bei der parallelen Suche auf zwei Strahlen, mit gegebenem Mindestabstand, einen besseren kompetitiven Faktor als 9 erhält.*

Beweis. Um dieses Lemma zu beweisen, betrachten wir zunächst die anzuwendende Strategie S und setzen später den Zielpunkt t auf die für S ungünstigste, erlaubte Position. D.h. er wird dorthin platziert, wo der kompetitive Faktor zu S maximiert wird.

Klar ist, dass sich beide Agenten auf unterschiedlichen Strahlen bewegen müssen, da sie nicht umkehren dürfen bevor sie das Ziel gefunden haben, und wir ansonsten t auf den von den Agenten nicht besuchten Strahl platzieren könnten, was zu einem unendlich großem kompetitiven Faktor führt. Betrachte nun die Funktion $v_{\min}(T)$ die wir wie folgt definieren

$$v_{\min}(T) = \min_{t \in [0, T]} \{\min\{v_1(t), v_2(t)\}\}.$$

Die Funktion $v_{\min}(T)$ ist eine monotone, nicht-steigende Funktion für die gilt $v_{\min}(T) \geq 0$, für alle $T > 0$ und $T \leq T_F$, wobei wir mit T_F den Zeitpunkt bezeichnen wollen, wenn einer der Agenten das Ziel gefunden hat. Wir können sehen, daß die Funktion $v_{\min}(T)$ nach unten beschränkt ist durch $v_{\min} = \lim_{T \rightarrow \infty} v_{\min}(T)$. Aus dieser Definition sehen wir, dass $v_1(T) \geq v_{\min}$ und $v_2(T) \geq v_{\min}$, für alle $0 < T \leq T_F$.

Wir wollen o.B.d.A. annehmen, dass $v_i = 1$ im Intervall $[0; D_{\min}]$ gilt, für alle $i \in \{1, 2\}$. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $T_D \geq 1$, so dass für ein $i \in \{1, 2\}$ gilt: $v_i(T_D) \leq v_{\min} + \varepsilon$. Der Einfachheit halber gelte dies o.B.d.A. für $i = 1$. So gilt $v_1(T_D) \cdot T_D \geq 1 = D_{\min}$, und wir können t an die Stelle

$$D = v_1(T_D) \cdot T_D \tag{1}$$

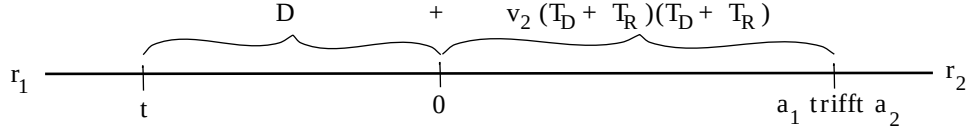


Abbildung 1: Diese Abbildung verdeutlicht noch einmal, wie der Term T_R zusammengesetzt ist

auf den Strahl r_1 setzen. Eine untere Schranke für den kompetitiven Faktor kann nun wie folgt formuliert werden.

$$C \geq \frac{T_D + 2T_R}{D}, \quad (2)$$

wobei mit T_R die Zeit bezeichnet wird, die der Agent a_1 benötigt um den anderen Agenten a_2 mit Höchstgeschwindigkeit $v_{\max}$ zu erreichen. Da nun beide Agenten erneut dieselbe Zeit benötigen, um wieder zu t zu gelangen, kommt dieser Term noch einmal hinzu, daher $2T_R$. Da es sich um eine monotone Strategie handelt, können wir die Zeit T_R auch schreiben als

$$T_R = D + v_2(T_D + T_R) \cdot (T_D + T_R).$$

Dies ist klar, denn Agent a_1 muss zunächst wieder zurück zum Ursprung, also die Strecke D ablaufen. $v_2(T_D + T_R)$ ist die durchschnittliche Geschwindigkeit von Agent a_2 , bis ihn Agent a_1 erreicht. Multipliziert mit der verstrichenen Zeit bis dies passiert, erhalten wir also die Strecke, die Agent a_1 noch auf Strahl r_2 zurücklegen muss, um zu Agent a_2 zu gelangen. Da Agent a_1 mit der Geschwindigkeit $v_{\max} = 1$ reist, entspricht die Strecke auch der Zeit, die verstreicht vom Zeitpunkt T_F , wenn a_1 das Ziel t findet, bis zu dem Zeitpunkt, wo er auf Agent a_2 trifft (siehe Abbildung 1).

Wir lösen diesen Ausdruck nach T_R auf:

$$\begin{aligned} T_R &= D + v_2(T_D + T_R) \cdot (T_D + T_R) \\ &= D + v_2(T_D + T_R) \cdot T_D + v_2(T_D + T_R) \cdot T_R \\ \Leftrightarrow T_R \cdot (1 - v_2(T_D + T_R)) &= D + v_2(T_D + T_R) \cdot T_D \\ \Leftrightarrow T_R &= \frac{D + v_2(T_D + T_R) \cdot T_D}{1 - v_2(T_D + T_R)} \end{aligned} \quad (3)$$

Somit erhalten wir für den kompetitiven Faktor

$$\begin{aligned}
C &\stackrel{(2)}{\geq} \frac{T_D + 2T_R}{D} \\
&\stackrel{(3)}{=} \frac{T_D + 2 \frac{D+v_2(T_D+T_R) \cdot T_D}{1-v_2(T_D+T_R)}}{D} \\
&\stackrel{(1)}{=} \frac{T_D + 2 \frac{D+v_2(T_D+T_R) \cdot T_D}{1-v_2(T_D+T_R)}}{v_1(T_D) \cdot T_D} \\
&= \frac{T_D}{v_1(T_D) \cdot T_D} + \frac{2v_1(T_D) \cdot T_D}{(1-v_2(T_D+T_R))v_1(T_D) \cdot T_D} \\
&\quad + \frac{2v_2(T_D+T_R) \cdot T_D}{v_1(T_D) \cdot T_D \cdot (1-v_2(T_D+T_R))} \\
&= \frac{1}{v_1(T_D)} + \frac{2}{1-v_2(T_D+T_R)} + \frac{2}{v_1(T_D)} \cdot \frac{v_2(T_D+T_R)}{1-v_2(T_D+T_R)}
\end{aligned}$$

Da $v_1(T_D) \leq v_{\min} + \varepsilon$ und $v_2(T_D+T_R) \geq v_{\min}$ gilt können wir schreiben

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{v_{\min} + \varepsilon} + \frac{2}{1-v_{\min}} + \frac{2}{v_{\min} + \varepsilon} \cdot \frac{v_{\min}}{1-v_{\min}} \\
&= \frac{1 - \frac{\varepsilon}{v_{\min} + \varepsilon}}{v_{\min}} + \frac{2}{1-v_{\min}} + \frac{2 - \frac{2\varepsilon}{v_{\min} + \varepsilon}}{1-v_{\min}}
\end{aligned}$$

Letzteres erhalten wir durch Erweitern des ersten Bruchs mit $\frac{v_{\min} + \varepsilon}{v_{\min}}$ und das Produkt der letzten beiden Brüche mit $v_{\min} + \varepsilon$.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{v_{\min}} + \frac{4}{1-v_{\min}} - \frac{\frac{1-v_{\min}}{v_{\min}} \cdot \frac{\varepsilon}{v_{\min} + \varepsilon} + \frac{2\varepsilon}{v_{\min} + \varepsilon}}{1-v_{\min}} \\
&= \frac{1}{v_{\min}} + \frac{4}{1-v_{\min}} - \frac{\varepsilon(1-v_{\min}) + 2\varepsilon v_{\min}}{(1-v_{\min})(v_{\min} + \varepsilon)v_{\min}} \\
&= \frac{1}{v_{\min}} + \frac{4}{1-v_{\min}} - \frac{\varepsilon(v_{\min} + 1)}{v_{\min}(v_{\min} + \varepsilon)(1-v_{\min})}
\end{aligned}$$

Durch Ableiten nach $v_{\min}$ und Nullsetzen können wir ein Minimum im erlaubten Intervall $[0; 1]$ an der Stelle $v_{\min} := 1/3$ feststellen. Durch Einsetzen erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
&\stackrel{\geq}{v_{\min}=1/3} 9 - \frac{18\varepsilon}{1+3\varepsilon} \\
&\stackrel{=}{\varepsilon \rightarrow 0} 9.
\end{aligned} \tag{4}$$

Wenn ε gegen 0 strebt, strebt also der kompetitive Faktor gegen 9. Damit haben wir Lemma 3 bewiesen. $\square$

3.2 Symmetrische Strategien auf 2 Strahlen

Nun wollen wir uns mit symmetrischen Strategien befassen. Folgendes Lemma zeigt, dass wir sogar nur symmetrische Full-Speed-Strategien betrachten müssen.

Lemma 4 *Für alle $\varepsilon > 0$ und alle Strategien S gibt es eine Full-Speed-Strategie S' , sodass der kompetitiven Faktor von S' höchstens dem $(1 + \varepsilon)$ -fachen des kompetitiven Faktors von S entspricht.*

Beweis. Wir unterteilen die Zeit in kleine Intervalle der Länge δ . Wenn die Strategie S in einem Intervall I die Durchschnittsgeschwindigkeit v besitzt, dann sei S' die Full-Speed-Strategie, worin der Agent im Intervall I zunächst für $(1 - v)\frac{\delta}{2}$ Zeiteinheiten rückwärts läuft und danach vorwärts für $(1 + v)\frac{\delta}{2}$ Zeiteinheiten. Nachdem das Zeitintervall I abgelaufen ist, befindet sich der Agent der Strategie S' an der selben Stelle, als hätte er Strategie S verfolgt. Allerdings würde er ein Ziel, was sich in diesem Intervall befindet erst später finden, als ein Agent aus S . Der Vollständigkeit halber hätten wir aber auch genau dann einen Vorteil mit Strategie S' , wenn unser Agent einem anderen Agenten den Zielpunkt genau dann mitteilen will, wenn dieser ihm bereits entgegenkommt. Aus diesen Gründen lassen wir die Intervalllänge δ gegen 0 laufen. Denn dann folgt daraus unsere Behauptung. $\square$

Wir können also jede beliebige Strategie durch eine Full-Speed-Strategie simulieren, und müssen uns daher im Folgenden nur mit Full-Speed-Strategien befassen, wenn wir eine untere Schranke für die Distanz zwischen Ursprung und Ziel berechnen wollen.

Nun wollen wir eine untere Schranke für symmetrische Full-Speed-Strategien beweisen. Hier betrachten wir wieder zuerst nur den einfachen Fall $m = 2$. Eine Erweiterung auf $m > 2$ folgt anschließend. Für den Beweis der unteren Schranke des einfachen Falls greifen wir auf eine Technik zurück, deren Ergebnis aus [6] von Schuierer stammt. Diese wollen wir schon jetzt betrachten, um sie später direkt anwenden zu können.

Definition 5

Sei $X = (x_0, x_1, \dots)$ eine Sequenz von positiven reellen Zahlen. Seien weiterhin p und d positive ganze Zahlen, mit $0 \leq d < p$. Dann definieren wir

$$a_d = \overline{\lim}_{n \geq 0} (x_{np+d})^{\frac{1}{np+d}}$$

und

$$a = \overline{\lim}_{n \geq 0} (x_n)^{\frac{1}{n}}.$$

Für $p, k \geq 1$ bezeichnen wir den $(k + 1)$ -dimensionalen konvexen Kegel, der durch die Menge von Vektoren $\{(x_{ip}, x_{ip+1}, \dots, x_{ip+k}) \mid 0 \leq i < \infty\}$

aufgespannt wird, mit $W_{p,k}(X)$. D.h.

$$W_{p,k}(X) = \{Y \mid Y = \sum_{i=0}^n \beta_i(x_{ip}, x_{ip+1}, \dots, x_{ip+k}), 0 \leq \beta_i, 0 \leq n < \infty\}.$$

Wir bezeichnen den Abschluss von $W_{p,k}$ mit $\overline{W}_{p,k}(X)$. Unsere Ergebnisse basieren auf folgender, entscheidender Beobachtung der Geometrie des konvexen Kegels $W_{p,k}(X)$ [6].

Lemma 6 *Seien $X = (x_0, x_1, \dots)$ eine Sequenz positiver reeller Zahlen, und p eine positive ganze Zahl. Wenn $a_d = a \in (0, \infty)$, für alle $0 \leq d < p-1$, und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < \infty$, dann existieren p positive Zahlen $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{p-1}$ die nur von X abhängen, sodass für alle $k \geq 1$ gilt*

$$(\gamma_0, \gamma_1 a, \gamma_2 a^2, \dots, \gamma_{p-1} a^{p-1}, \gamma_0 a^p, \gamma_1 a^{p+1}, \dots, \gamma_{(k \bmod p)} a^k) \in \overline{W}_{p,k}(X).$$

Dieses Lemma liefert uns später die Basis für unseren Beweis der unteren Schranke.

Damit wir aber die Definition (5) und das Lemma (6) auf unser Problem anwenden können, müssen wir zunächst jede symmetrische Full-Speed-Strategie als Sequenz positiver Zahlen ausdrücken. Das Ergebnis dazu sehen wir im folgenden Lemma. Wofür die Elemente dieser Sequenz stehen, und wie sich der kompetitive Faktor daraus zusammensetzt wird, wird durch den Beweis des Lemmas klar.

Lemma 7 *Sei $\mathcal{Z}$ die Menge der unendlichen, positiven Sequenzen $Z = (z_0, z_1, \dots)$ mit $z_{2k} > z_{2k-2}$ und $z_{2k+1} > z_{2k-1}$, für alle $k \geq 1$. Wenn S eine symmetrische Strategie ist, dann ist der kompetitive Faktor C_S von S mindestens*

$$\inf_{Z \in \mathcal{Z}} \sup_{k \geq 1} \left\{ 1 + 2 \max \left\{ \frac{z_{2k} + z_{2k+1}}{z_{2k-1}}, \frac{z_{2k+2} + z_{2k+3}}{z_{2k+2} - z_{2k}} \right\} \right\}.$$

Beweis.

Da die Strategie symmetrisch ist, verwenden beide Agenten die selbe lokale Strategie, um auf ihrem Strahl nach dem Ziel zu suchen. Desweiteren können wir durch Lemma (4) annehmen, dass es sich um eine Full-Speed-Strategie handelt. Jede solche Full-Speed-Strategie können wir wie folgt erzeugen. Wir schicken den Agenten zuerst eine Strecke x_0 nach vorne, und danach eine Strecke y_0 zurück. Danach eine Strecke x_1 nach vorne und y_1 zurück, u.s.w.. Wenn einer der Agenten das Ziel findet, läuft er (natürlich mit Höchstgeschwindigkeit) zurück, bis er den anderen Agenten trifft, worauf beide zum Ziel laufen.

Auch in diesem Beweis überlegen wir uns zunächst, wodurch eine solche Strategie definiert ist und setzen dann den Zielpunkt t auf die für diese Klasse

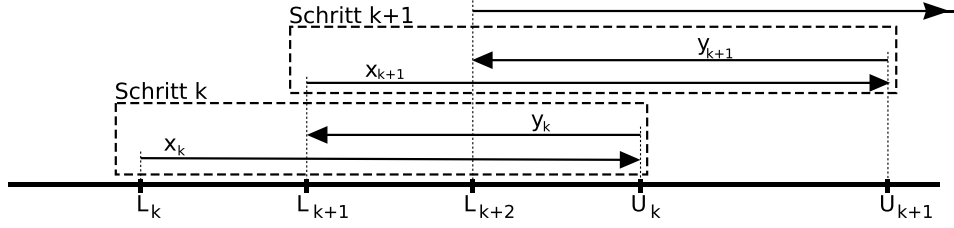


Abbildung 2: Schritt k beginnt an der Stelle L_k und endet an der Stelle L_{k+1} , nachdem der Agent bei U_k umgekehrt ist.

von Strategien ungünstigste Stelle, die erlaubt ist. denn zur Erinnerung: Der kompetitive Faktor ist schließlich das Maximum über alle möglichen Positionen des Ziels vom Quotienten aus der Zeit, die die Strategie benötigt, und der optimalen Zeit.

Wir sagen, ein Agent befindet sich im Schritt k , wenn er zum $(k+1)$ -ten mal vor und zurückläuft (siehe Abbildung 2). Sei mit L_k die Strecke bezeichnet, die zwischen Ursprung und dem Wendepunkt liegt, an dem der Agent Schritt k beginnt, und sei mit U_k die Strecke zwischen Ursprung und Wendepunkt bezeichnet, an dem der Agent während des k -ten Schritts beginnt rückwärts zu laufen. Nun sind

$$\begin{aligned}
 L_0 &:= 0, \\
 L_k &:= L_{k-1} + x_{k-1} - y_k - 1 = \sum_{i=0}^{k-1} (x_i - y_i), \\
 U_k &:= L_k + x_k = x_k + \sum_{i=0}^{k-1} (x_i - y_i) = y_k + \sum_{i=0}^k (x_i - y_i).
 \end{aligned} \tag{5}$$

Die Gesamtzeit, die der Agent nach Schritt k gereist ist beträgt

$$T_k := \sum_{i=0}^k (x_i + y_i). \tag{6}$$

Zunächst können wir für alle $k > 0$ annehmen, dass $y_k \leq U_k$ ist, was nur bedeutet, dass ein Agent stets auf seinem Strahl bleibt. Falls dies nicht eingehalten wird, dann tauschen wir die Strategie durch eine ansonsten äquivalente Strategie aus, worin wir das Problem dadurch umgehen, dass die Agenten, wenn sie sich am Ursprung treffen, die Plätze tauschen und die Strategie auf ihrem eigenen Strahl fortsetzen, anstatt jeweils auf den Strahl des anderen Agent zu wechseln. Das können wir tun, da die Strategie dadurch nicht schlechter¹ wird.

¹im Sinne des kompetitiven Faktors

Nun können wir auch noch annehmen, dass $U_{k-1} < U_k$, da wir sonst keine neuen Bereiche eines Strahls besuchen, sondern nur bereits besuchte Bereiche absuchen. Trifft diese Annahme für eine Strategie nicht zu, so können wir auch diese durch eine sonst äquivalente Strategie austauschen, worin diese Annahme eingehalten wird. Auch hier gilt das Argument von vorher, dass nämlich die Strategie dadurch nicht schlechter wird. Allgemein können wir also annehmen, dass $y_k < x_{k+1}$ gilt, für alle $k \geq 0$.

Seien nun das Ziel in einer Distanz D zum Ursprung, mit $1 = D_{\min} \leq D$ und $U_{k-1} < D \leq U_k$ für ein $k \geq 0$, platziert. O.B.d.A. legen wir dann fest, dass $U_{-1} := 1$, wenn $U_0 > 1$ ist, denn wir können $x_{-1} = 1$, $y_{-1} = \varepsilon$ und $x_0 = U_0 - 1 + \varepsilon$ setzen, da wir wissen, dass das Ziel dadurch noch nicht gefunden werden kann. Das heisst, dass einer der Agenten, sagen wir a_1 , das Ziel während eines Schritts $k \geq 0$ findet. Wenn nun wieder mit T_R die Zeit bezeichnet wird, die Agent a_1 benötigt um zu Agent a_2 zu gelangen, nachdem er das Ziel gefunden hat, dann ist der kompetitive Faktor für diese Platzierung gegeben durch

$$\begin{aligned} C_D &= \frac{T_{k-1} + (D - L_k) + 2T_R}{D} = 1 + \frac{\overset{(6)}{T_{k-1}} - \overset{(5)}{L_k} + 2T_R}{D} \\ &= 1 + \frac{\sum_{i=0}^{k-1} (x_i + y_i) - \sum_{i=0}^{k-1} (x_i - y_i) + 2T_R}{D} \\ &= 1 + \frac{2 \sum_{i=0}^{k-1} y_i + 2T_R}{D} = 1 + 2 \frac{\sum_{i=0}^{k-1} y_i + T_R}{D} \end{aligned}$$

da der Term $D - L_k$ die Zeit bezeichnet, die Agent a_1 braucht um im Schritt k das Ziel zu erreichen. Und weil beide Agenten wieder zum Ziel zurückkehren müssen, brauchen wir einen Faktor von zwei für T_R .

Wir werden nun zwei Fälle von möglichen Platzierungen für das Ziel t betrachten und schliesslich das Maximum der beiden auswählen für den kompetitiven Faktor.

1. Platzierung: Wir nehmen an, dass der Agent a_2 noch während des Schritts k , in dem Agent a_1 das Ziel t gefunden hat, von a_1 erreicht werden kann. Da wir das Ziel im Intervall $]U_{k-1}, U_k]$ platzieren, ist das Worst-Case-Verhältnis C_k^1 der Zeit, die die Strategie braucht, zur optimalen Zeit, gegeben durch

$$C_k^1 = \sup_{D \in]U_{k-1}, U_k]} \left\{ 1 + 2 \frac{\sum_{i=0}^{k-1} y_i + T_R}{D} \right\}$$

Wir setzen D auf U_{k-1} , um den Bruch zu maximieren. Das geht, weil T_R nicht von D abhängt, denn wir können T_R schreiben als

$$T_R = \frac{D + L_{k+1} + (U_k - D) + (U_k - L_{k+1})}{2} = \frac{2U_k}{2} = U_k.$$

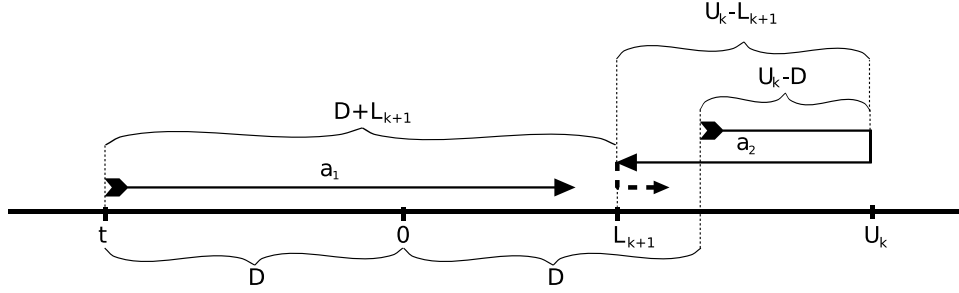


Abbildung 3: Der linke Pfeil beschreibt den Weg von Agent a_1 , der rechte Pfeil den von Agenten a_2 . Agent a_1 verpasst a_2 , wenn $D + L_{k+1} > U_k - D + U_k - L_{k+1}$.

Dadurch erhalten wir

$$C_k^1 = 1 + 2 \frac{\sum_{i=0}^{k-1} y_i + U_k}{U_{k-1}} \quad (7)$$

Das bedeutet, um das Verhältnis zu maximieren, müssen wir das Ziel direkt hinter den Umkehrpunkt U_{k-1} setzen.

2. *Platzierung*: Wir nehmen an, dass der Agent a_1 den Agenten a_2 in Schritt k verpasst (Abbildung (3)). Da sich nun beide Agenten mit Höchstgeschwindigkeit in die selbe Richtung bewegen, können sie sich frühestens im Schritt $k+1$ treffen, nachdem Agent a_2 am Punkt $U_k + 1$ umkehrt. Damit der Fall eintritt, dass Agent a_1 den Agenten a_2 verpasst, muss die Strecke $D + L_{k+1}$ länger sein, als die Summe folgender beider Strecken: Erstens die Strecke vom Punkt mit Abstand D auf dem Strahl r_2 bis zum Punkt U_k , und zweitens die Strecke vom Punkt U_k zurück zu Punkt L_{k+1} . D.h. also

$$L_{k+1} + D > U_k - D + U_k - L_{k+1} = U_k - D + y_k,$$

wenn $D > y_k$ (denn sonst hätten wir ihn schon in Schritt k eingeholt). Somit ist die Platzierung des Ziels auf das Intervall $[y_k, U_k]$ beschränkt, was für uns bedeutet, dass wir das Ziel in einem Abstand y_k zum Ursprung platzieren müssen, um das Maximum für den kompetitiven Faktor zu erhalten. Das Verhältnis C_k^2 der Zeit, benötigt durch Strategie S , zur optimalen Zeit ist somit also gegeben durch

$$\begin{aligned} C_k^2 &= \sup_{D \in [y_k, U_k]} \left\{ 1 + 2 \frac{\sum_{i=0}^{k-1} y_i + T_R}{D} \right\} \\ &\geq 1 + 2 \frac{\sum_{i=0}^{k-1} y_i + \tilde{T}_R}{y_k}, \end{aligned} \quad (8)$$

wobei wir nur den Fall betrachten wollen, dass Agent a_1 direkt in Schritt $k+1$ Agent a_2 erreicht, und nicht erst in einem späteren Schritt. Das können

wir annehmen, da wir im Falle, dass dies nicht eintrifft, wir wieder eine ansonsten äquivalente Strategie betrachten können, die wieder im Sinne des kompetitiven Faktors nicht schlechter ist, als die ursprüngliche Strategie. So können wir T_R , das von D abhängt, durch ein $\tilde{T}_R$ ersetzen, welches nicht mehr von D abhängt und geschrieben werden kann als

$$\begin{aligned}\tilde{T}_R &= \frac{D + U_{k+1} + (U_k - D) + y_k + x_{k+1}}{2} = \frac{y_k + x_{k+1} + U_{k+1} + U_k}{2} \\ &= x_{k+1} + U_k\end{aligned}\tag{9}$$

Damit, und durch das Hinzufügen eines Nullterms $[y_k - y_k]$, sodass wir einen weiteren Term y_k in die Summe ziehen können, erhalten wir

$$\begin{aligned}C_k^2 &= 1 + 2 \frac{\sum_{i=0}^{k-1} y_i + x_{k+1} + U_k + [y_k - y_k]}{y_k} \\ &= 1 + 2 \frac{\sum_{i=0}^k y_i + U_{k+1}}{y_k}.\end{aligned}\tag{10}$$

Somit ist C_k^2 eine untere Schranke für den kompetitiven Faktor, abhängig davon, ob der Agent a_1 den Agenten a_2 verpassen kann oder nicht. Wir können folglich zwischen C_k^1 und C_k^2 wählen, um den kompetitiven Faktor zu maximieren. Das bedeutet also, dass der kompetitive Faktor für jede symmetrische Strategie durch

$$C = \sup_{k \geq 0} \max\{C_k^1, C_k^2\}$$

nach unten beschränkt ist.

Substituieren wir $z_{2k} := \sum_{i=0}^k y_i$ und $z_{2k+1} := U_{k+1}$, für alle $k \geq 0$, und sei $Z = (z_0, z_1, \dots)$, dann können wir den Term $\max\{C_k^1, C_k^2\}$, für $k \geq 2$ als folgendes Funktional schreiben

$$F_{k-1}(Z) = 1 + 2 \max \left\{ \frac{z_{2k-2} + z_{2k-1}}{z_{2k-3}}, \frac{z_{2k} + z_{2k+1}}{z_{2k} - z_{2k-2}} \right\},$$

wobei gilt $z_{2i} > z_{2i-2}$ und $z_{2i+1} > z_{2i-1}$, für alle $i \geq 1$. Das dies gilt geht direkt aus der Definition der Elemente mit geradem und ungeradem Grad der Sequenz Z hervor. Das beweist unser Lemma. $\square$

Nun wollen wir unser Gesamtergebnis für symmetrische Strategien formulieren.

Theorem 8 *Es existiert keine symmetrische Suchstrategie mittels der man bei der parallelen Suche auf zwei Strahlen einen besseren kompetitiven Faktor als 9 erhält.*

Beweis. Sei S eine symmetrische Strategie, um auf zwei Strahlen zu suchen, und sei $\mathcal{Z}$ eine Menge von unendlichen positiven Sequenzen $Z = (z_0, z_1, \dots)$ mit $z_{2k} > z_{2k-2}$ und $z_{2k+1} > z_{2k-1}$, für alle $k \geq 1$, und sei

$$F_k(Z) := 1 + 2 \max \left\{ \frac{z_{2k} + z_{2k+1}}{z_{2k-1}}, \frac{z_{2k+2} + z_{2k+3}}{z_{2k+2} - z_{2k}} \right\},$$

für $Z \in \mathcal{Z}$. Aus Lemma 7 wissen wir, dass der kompetitive Faktor C_S von S

$$C_S \geq \inf_{Z \in \mathcal{Z}} \sup_{k \geq 1} F_k(Z) \quad (11)$$

erfüllt. Um unser Theorem zu beweisen, müssen wir jetzt zeigen, dass dieser Ausdruck von unten durch 9 beschränkt ist. Sei dafür $Z := (z_0, z_1, \dots)$ eine Sequenz aus $\mathcal{Z}$. Zuerst wollen wir annehmen, dass $a = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (z_n)^{1/n} > 1$. In diesem Fall können wir zeigen, dass für zwei positive Zahlen γ_0, γ_1 gilt:

$$F_k(\gamma_0, \gamma_1 a, \gamma_0 a^2, \gamma_1 a^3, \dots) \leq \sup_{0 \leq i < \infty} F_k(Z^{2i}), \quad (12)$$

wobei mit Z^{2i} das Suffix von Z gemeint ist, das mit dem Element z_{2i} beginnt, also $Z^{2i} = (z_{2i}, z_{2i+1}, \dots)$. Den Beweis für Ungleichung 12 wollen wir an späterer Stelle (Seite 18) führen. Somit kann unsere Aussage wie folgt bewiesen werden. Aus Ungleichung 12 folgt

$$\sup_{0 \leq k < \infty} \sup_{0 \leq i < \infty} F_k(Z^{2i}) \geq \sup_{0 \leq k < \infty} F_k(\gamma_0, \gamma_1 a, \gamma_0 a^2, \dots).$$

Also gilt für alle $k, i \geq 0$, $F_{k+i}(Z) = F_k(Z^{2i})$, und somit auch

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq k < \infty} F_k(Z) &= \sup_{0 \leq k, i < \infty} F_{k+i}(Z) = \sup_{0 \leq k < \infty} \sup_{0 \leq i < \infty} F_k(Z^{2i}) \\ &\geq \sup_{0 \leq k < \infty} F_k(\gamma_0, \gamma_1 a, \gamma_0 a^2, \dots). \end{aligned}$$

Bleibt noch, eine untere Schranke zu $F_k(\gamma_0, \gamma_1 a, \gamma_0 a^2, \dots)$ für $a > 1$ und $\gamma_0, \gamma_1 > 0$ zu berechnen. Sei $\gamma = \gamma_1/\gamma_0$; dann erhalten wir durch einfaches Einsetzen in die Definition von F_k :

$$\begin{aligned} F_k(\gamma_0, \gamma_1 a, \gamma_0 a^2, \dots) &= 1 + 2 \max \left\{ \frac{a^{2k} + \gamma a^{2k+1}}{\gamma a^{2k-1}}, \frac{a^{2k+2} + \gamma a^{2k+3}}{a^{2k+2} - a^{2k}} \right\} \\ &= 1 + 2 \max \left\{ \frac{a}{\gamma} + a^2, \frac{a^2 + \gamma a^3}{a^2 - 1} \right\}. \end{aligned}$$

Die Maximumsfunktion besitzt ein Minimum für $\gamma = a - 1/a$ und $a = \sqrt{2}$. Man kann dies nachrechnen, indem man beide Terme der Maximumfunktion als Funktionen in Abhängigkeit von γ schreibt und γ selbst als Funktion in Abhängigkeit von a annimmt. Da ein Minimum notwendigerweise eine

Nullstelle der ersten Ableitung besitzt, lässt sich damit eben diese Lösungen errechnen. Die Rechnung, die zu diesen Ergebnissen führt lässt sich nur durch Verschachtelung der beiden Funktionen und ihrer Ableitungen durchführen. Das führt zu einer Differentialgleichung, die die genannten Lösungen besitzt. Da die Rechnung an dieser Stelle zu weit abschweifen würde, übernehmen wir die Lösungen ohne weiteren Beweis. Durch Einsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq k < \infty} F_k(Z) &= 1 + 2 \max \left\{ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}} + 2, \frac{2 + (\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}})2^{\frac{3}{2}}}{2 - 1} \right\} \\ &= 1 + 2 \max \left\{ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}(1 - \frac{1}{2})} + 2, 2 + 2^2 - 2 \right\} \\ &\geq 9 \end{aligned}$$

$$\sup_{0 \leq k < \infty} F_k(Z) \geq 9,$$

für alle $Z \in \mathcal{Z}$. Also folgt unsere Behauptung aus Ungleichung (11).

Es bleibt also noch Ungleichung (12) zu beweisen. Hierzu machen wir zunächst eine Fallunterscheidung. Sei also

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (z_{2n+1})^{\frac{1}{2n+1}} = a_1 \neq a_2 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (z_{2n})^{\frac{1}{2n}},$$

dann ist $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{z_{n+1}}{z_n} = \infty$. Das heißt, dass die Summe der Strecken, die ein Agent rückwärts läuft einen anderen Grenzwert für $n \rightarrow \infty$ besitzt, als die Folge der oberen Grenzen U_k für $k \rightarrow \infty$. Das bedeutet auch, dass nicht beide Werte gegen Unendlich laufen können. Aber es kann nicht sein, dass die Reihe und die Folge gleichzeitig einen endlichen Grenzwert besitzen. Also muss entweder $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{z_{2n+2}}{z_{2n+1}} = \infty$ (die Summe der Strecken, die ein Agent rückwärts läuft ist nicht beschränkt) oder $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{z_{2n+1}}{z_{2n}} = \infty$ (der Bereich, der von der Strategie untersucht wird ist nicht beschränkt) sein. Im ersten Fall strebt der erste Term des Maximums von F_k gegen unendlich und im zweiten Fall, der zweite Term. Daher können wir annehmen, dass $a_1 = a_2 = a$ gilt und $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{z_{n+1}}{z_n} < \infty$ gilt, denn wir wollen einen unendlichen kompetitiven Faktor ausschließen. D.h. Z erfüllt alle Bedingungen von Lemma (6), für $p = 2$. Sei $k \geq 0$ konstant. Dann impliziert Lemma (6), dass positive Zahlen γ_0 und γ_1 existieren, mit

$$(\gamma_0, \gamma_1 a, \gamma_0 a^2, \dots, \gamma_1 a^{2k+3}) \in \overline{W}_{2,2k+3}(Z).$$

Das impliziert, dass für beliebiges $\delta > 0$ eine positive ganze Zahl $n \geq 0$ existiert, sowie nicht negative Zahlen β_i , für $0 \leq i \leq n$, sodass die Elemente

$z_{j,\delta}$ der Sequenz Z_δ , die durch

$$Z_\delta := \sum_{i=0}^n \beta_i Z^{2i}$$

definiert ist, die Ungleichung

$$|z_{j,\delta} - \gamma_d a^j| < \delta,$$

für $0 \leq j \leq 2k+3$, $d := j \bmod 2$ erfüllen. D.h. für jedes $\delta > 0$ gibt es ein Suffix der Sequenz Z , woraus wir die Sequenz Z_δ erzeugen, sodass die Abweichung der Elemente aus Sequenz Z_δ vom gemeinsamen Grenzwert a durch δ beschränkt ist. Mit anderen Worten: Indem wir das Suffix von Z weiter hinten abschneiden, liegen die Elemente der Sequenz Z_δ beliebig nah am gemeinsamen Grenzwert a , wenn wir die geraden Elemente mit δ_0 und die ungeraden Elemente mit δ_1 gewichten.

Darüber hinaus ist, wenn $X, Y \in \mathcal{Z}$ und $\alpha, \beta \geq 0$ gilt,

$$F_k(\alpha X + \beta Y) \leq \max\{F_k(X), F_k(Y)\}, \quad (13)$$

denn es gilt $(a+c)/(b+d) \leq \max\{a/b, c/d\}$, wenn $a, b, c, d > 0$. Ausserdem gilt

$$F_k(\alpha X) = F_k(X), \quad (14)$$

für $\alpha \geq 0$, weil sich das α , beim Einsetzen in F_K komplett wegekürzt (siehe dazu die Definition von F_k auf Seite 17). Schliesslich gilt noch $Z^{2i} \in \mathcal{Z}$, da jedes Suffix einer unendlichen positiven Sequenz wieder eine unendliche positive Sequenz ist, und die Elemente mit geradem als auch mit ungeradem Index weiterhin jeweils aufsteigend sortiert bleiben. Daher gilt auch

$$Z_\delta = \sum_{i=0}^n \beta_i Z^{2i} \in \mathcal{Z},$$

und daraus ergibt sich dann

$$\begin{aligned} F_k(Z_\delta) &= F_k(z_{0,\delta}, z_{1,\delta}, \dots, z_{2k+3,\delta}, z_{2k+4,\delta}, \dots) \\ &= F_k\left(\sum_{i=0}^n \beta_i Z^{2i}\right) \stackrel{(12)}{\leq} \sup_{0 \leq i < \infty} F_k(\beta_i Z^{2i}) \stackrel{(14)}{=} \sup_{0 \leq i < \infty} F_k(Z^{2i}). \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Ungleichung durch induktive Anwendung der Ungleichung (12), und die letzte Ungleichung folgt aus $\beta_i \geq 0$ und (14) ist. Daher ist

$$\sup_{0 \leq i < \infty} F_k(Z^{2i}) \geq \lim_{\delta \rightarrow 0} F_k(Z_\delta) = F_k(\gamma_0, \gamma_1 a, \gamma_0 a^2, \dots).$$

Diese Gleichung folgt aus der Tatsache, dass F_k in einer Nachbarschaft von $(\gamma_0, \gamma_1 a, \gamma_0 a^2, \dots)$ stetig ist, wenn $a > 1$. Zuletzt betrachten wir noch den Fall $a = 1$. Hier gilt noch immer die Ungleichung

$$\sup_{0 \leq i < \infty} F_k(Z^{2i}) \geq F_k(Z_\delta),$$

für alle $\delta > 0$. Da Z_δ sehr nah an der Sequenz $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_0, \gamma_1, \dots)$ liegt, kann man sehen, dass der Wert $F_k(Z_\delta)$ gegen Unendlich strebt, wenn δ gegen 0 läuft. Also haben Strategien, für die gilt $a = 1$, einen unbeschränkten kompetitiven Faktor. Anschaulich betrachtet sind das Strategien, die in höheren Schritten nicht weit genug nach vorne expandieren, um neue Bereiche abzusuchen, und die Agenten auch nicht weit genug zurücklaufen, sodass sie schnell genug erreicht werden können. An dieser Stelle gilt erneut die gleiche Überlegung, die wir uns zuvor für die Ungleichung 8 gemacht haben. Eine Strategie verliert nichts an ihrer Effektivität, wenn wir voraussetzen, dass ein Agent nicht mehr als einen weiteren Schritt benötigt, um einem anderen Agenten den Zielort mitzuteilen. Damit ist der Beweis von Theorem (8) vollständig. $\square$

3.3 Strategien auf m Strahlen

Wir wollen nun unser Wissen vom parallelen Suchen auf zwei Strahlen auf das parallele Suchen auf m Strahlen anwenden, und zeigen, dass wir auch hier keinen besseren kompetitiven Faktor als 9 erzielen können, sowohl bei monotonen als auch bei symmetrischen Strategien. Fassen wir dies in ein Theorem.

Theorem 9 *Es existiert weder eine monotone, noch eine symmetrische Strategie zum parallelen Suchen eines Zieles auf m Strahlen, die einen besseren kompetitiven Faktor als 9 erzielt.*

Beweis. Wir beweisen zunächst unsere Aussage für monotone Strategien. Dazu betrachten wir folgende kleine Tatsache. Sind im Voraus weitere Informationen über den Ort des Ziels bekannt, und haben wir eine Strategie, die diese Informationen verwendet, so wird sich der kompetitive Faktor dieser Strategie nicht erhöhen. Daher wollen wir den konkreten Fall betrachten, dass im Voraus bekannt ist, dass das Ziel auf einem der ersten beiden Strahlen zu finden ist. Dann können die Agenten die beiden Strahlen mittels monotoner Strategie absuchen. Schenken wir jetzt nur den beiden Agenten Beachtung, die jeweils auf ihrem Strahl den grössten Abstand zum Ursprung besitzen, so haben wir erneut eine monotone Strategie für zwei Agenten auf zwei Strahlen. Von einer solchen Strategie wissen wir, nach Lemma 3, dass sie keinen besseren kompetitiven Faktor als 9 haben kann.

Für symmetrische Strategien gehen wir auf ähnliche Weise vor. Hat ein Agent einmal das Ziel gefunden, so trägt nur noch die Zeit zum kompetitiven Faktor bei, die der Agent benötigt, um zu allen anderen Agenten zu gelangen und dann wieder zurück zum Ziel. Dieser Faktor ist nach unten durch die Zeit beschränkt, die der Agent benötigt, zu *einem* Agenten zu gelangen und dann zum Ziel zurückzukehren. Aus Theorem 8 wissen wir, dass dieser kompetitive Faktor nach unten durch 9 begrenzt ist. $\square$

3.4 Die Doubling-Strategie

Jetzt, wo wir wissen, dass es keine Strategie geben kann, die einen besseren kompetitiven Faktor als 9 besitzt, wollen wir eine Strategie betrachten, die diesen optimalen kompetitiven Faktor von 9 auch erzielt, um auf m Strahlen mittels m Agenten nach einem Ziel zu suchen. Die Strategie, die wir jetzt betrachten wollen, ist bekannt als *Doubling-Strategie*. Die Agenten, die diese Strategie verfolgen, gehen jeweils auf ihrem Strahl erst eine Längeneinheit (LE) nach vorne und kehren dann zurück zum Ursprung. Dann gehen sie zwei LE nach vorne und wieder zurück zum Ursprung. Dies wiederholen sie, indem sie jedes Mal ihre Schrittweite nach vorne verdoppeln und dann wieder zum Ursprung zurückkehren. Findet ein Agent das Ziel, so kehrt er sofort mit Höchstgeschwindigkeit zum Ursprung zurück und wartet dort auf die restlichen Agenten. Es ergibt keinen Sinn, einem Agenten weiter entgegen zu laufen, er würde zwar früher erreicht werden, es würde aber genauso lange dauern bis beide Agenten wieder zum Ursprung gelangen, wie es gedauert hätte, wenn der Agent dort auf den anderen Agenten gewartet hätte. Sind also alle Agenten gleichzeitig zum Ursprung zurückgekehrt, kann der Zielort verraten werden und alle Agenten laufen zusammen zum Ziel zurück. Der kompetitive Faktor der doubling strategy is gegeben durch

$$\begin{aligned} C &\leq \sup_{D \in [2^{k-1}, 2^k]} \left\{ \frac{2 \sum_{i=0}^k 2^i + D}{D} \right\} \leq 1 + \sup_{D \in [2^{k-1}, 2^k]} \left\{ \frac{2 \sum_{i=0}^k 2^i}{D} \right\} \\ &\leq 1 + \frac{2 \sum_{i=0}^k 2^i}{2^{k-1}} = 1 + 2 \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k-1}} = 9 - \frac{1}{2^{k-2}} \leq 9, \end{aligned}$$

wenn mit D der Abstand des Ziels zum Ursprung bezeichnet ist. Diese Ungleichungskette bedient sich der Überlegungen, die wir zuvor für symmetrische Strategien und ihren kompetitiven Faktor getroffen haben, und der genauen Kenntniss der jeweiligen Schrittweite in jedem Schritt. Da wir gerade schon gezeigt haben, dass diese Strategie keinen besseren kompetitiven Faktor als 9 haben kann, haben wir somit auch bereits folgendes Theorem bewiesen.

Theorem 10 *Die doubling strategy erzielt beim parallelen Suchen auf m Strahlen, einen kompetitiven Faktor von 9, wenn eine untere Schranke für den Abstand zwischen Ziel und Ursprung gegeben ist.*

4 Strategien ohne Mindestabstand

In Kapitel 3 haben wir uns mit Strategien beschäftigt, die einen Mindestabstand zwischen Ursprung und Ziel voraussetzen, und eine untere Schranke für den kompetitiven Faktor dieser Strategien berechnet. Allerdings können wir eine solche Information nicht immer als gegeben voraussetzen. Daher

wollen wir uns in diesem Kapitel mit Strategien beschäftigen, die auch ohne diese zusätzliche Informaion das Problem lösen können. Auch hier wollen wir wieder eine untere Schranke für den kompetitiven Faktor solcher Strategien bestimmen und beweisen. Anders als im letzten Kapitel betrachten wir nun von Anfang an den allgemeinen Fall, wo m Agenten parallel auf m Strahlen suchen. Diesmal haben wir jedoch keinen Mindestabstand zwischen Ursprung und Ziel gegeben. Zu Beginn betrachten wir eine Strategie, die dieses Problem löst und einen kompetitiven Faktor von

$$1 + 2 \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k},$$

mit $k = \lceil \log m \rceil$ besitzt. Später zeigen wir, dass keine Strategie einen besseren kompetitiven Faktor besitzen kann, wenn die Problemstellung die Selbe ist.

4.1 Eine Strategie zur parallelen Suche auf m Strahlen

Um das Problem zu lösen, bekommt in der zu betrachtenden Strategie jeder Agent einen eigenen Strahl zugewiesen, auf dem er sich monoton mit einer Geschwindigkeit v nach vorne bewegt. Hat einer der Agenten das Ziel gefunden, beginnt er mit Höchstgeschwindigkeit die Jagd auf einen weiteren Agenten, um die Information weiterzugeben. Da nun zwei Agenten wissen wo sich das Ziel befindet, jagen diese Agenten zwei weitere mit Höchstgeschwindigkeit und so weiter. Bezeichnen wir die Intervalle, in denen die Anzahl der Jäger konstant ist als *Schritte*, so können wir sagen, dass sich in jedem Schritt die Anzahl der Jäger verdoppeln. Der 0-te Schritt beginnt, wenn genau ein Agent (2^0) das Ziel kennt, und endet dann, wenn der nächste Schritt beginnt, also wenn genau zwei Agenten (2^1) das Ziel kennen, so lässt sich vereinfacht schreiben, dass im i -ten Schritt genau 2^i Agenten das Ziel kennen, und ebensoviele Agenten jagen, die es nicht kennen. Sei mit T_i die Zeit bezeichnet, die verwendet wird, um Schritt i abzuschliessen, dann können wir alle T_i aufaddieren, um die Zeit zu bestimmen, die gebraucht wird, um alle Agenten zu informieren. Da es D/v Zeit braucht, um das Ziel erstmalig zu finden, und zum Schluss noch T_F Zeit um mit allen Agenten zurück zum Ziel zu gelangen, nachdem sie alle informiert wurden, dann können wir bereits den kompetitiven Faktor für diese Strategie aufstellen

$$C = \frac{\frac{D}{v} + \sum_{i=0}^{k-1} T_i + T_F}{D}. \quad (15)$$

Wir wollen nun die Zeit, vom Start bis zu dem Zeitpunkt, an dem alle Agenten das Ziel kennen, etwas genauer unter die Lupe nehmen. Die Zeit die ab dem Start vergeht, bis 2^i Agenten das Ziel kennen ist $D/v + \sum_{j=0}^{i-1} T_j$. Am Ende des $(i-1)$ -ten Schritts haben alle informierten Agenten den Abstand $D + v \sum_{j=0}^{i-1} T_j$ zum Ursprung. Im Schritt i jagen nun 2^i informierte Agenten

2^i suchende Agenten. Die einzige Ausnahme ist im Schritt $k - 1$, wenn m keine 2-er Potenz ist. Dann werden weniger als 2^i Agenten gejagt. Das ändert unsere weiteren Betrachtungen nicht, denn es gibt immernoch Agenten die informiert werden müssen, bevor alle zum Ziel zurückkehren können. Um die Agenten zu erreichen muss zunächst der gerade definierte Abstand zum Ursprung überwunden werden, und die selbe Strecke erneut auf dem Strahl des gejagten Agenten, und noch eine kleine Strecke $v \cdot T_i$, um den gejagten Agenten zu erreichen, denn der hat sich im Schritt i schließlich weiterhin suchend vorwärts bewegt. Mit dieser Überlegung schreiben wir die Zeit T_i nun als

$$T_i = 2 \left(D + v \sum_{j=0}^{i-1} T_j \right) + vT_i.$$

Um diesen Term zu vereinfachen, betrachten wir wieder die Strecke im Verhältnis zur relativen Geschwindigkeit eines jagenden und eines gejagten Agenten. Diese Geschwindigkeit beträgt $1 - v$. So können wir den Term vT_i weglassen, wenn wir den Rest durch $1 - v$ teilen und erhalten

$$T_i = \frac{2D + 2v \sum_{j=0}^{i-1} T_j}{1 - v}.$$

Durch Abspalten des letzten Summanden der Summe erhalten wir

$$\begin{aligned} &= \frac{2D + 2v \sum_{j=0}^{i-2} T_j}{1 - v} + \frac{2v}{1 - v} T_{i-1} \\ &= T_{i-1} + \frac{2v}{1 - v} T_{i-1} \\ &= T_{i-1} \left(1 + \frac{2v}{1 - v} \right) \\ &= T_{i-1} \frac{1 - v + 2v}{1 - v} \\ &= T_{i-1} \frac{1 + v}{1 - v}. \end{aligned}$$

T_0 ist die Zeit, die benötigt wird, um mit dem Agenten, der gerade das Ziel gefunden hat einen anderen Agenten zu erreichen. Sie haben den Abstand $2D$ zueinander. Auch hier betrachten wir wieder die relative Geschwindigkeit $1 - v$, um diese Strecke abzulaufen und erhalten als Lösung der Rekursionsgleichung

$$T_i = T_0 \left(\frac{1 + v}{1 - v} \right)^i = \frac{2D}{1 - v} \left(\frac{1 + v}{1 - v} \right)^i.$$

Somit erhalten wir

$$\sum_{i=0}^{k-1} T_i = \frac{2D}{1 - v} \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{1 + v}{1 - v} \right)^i$$

Durch Anwendung der Rechenregel $\sum_{i=0}^{k-1} x^i = \frac{x^k - 1}{x - 1}$ lässt sich dies vereinfachen zu

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k-1} T_i &= \frac{2D}{1-v} \frac{\left(\frac{1+v}{1-v}\right)^k - 1}{\frac{1+v}{1-v} - 1} \\
&= 2D \cdot \frac{\left(\frac{1+v}{1-v}\right)^k - 1}{\frac{1+v}{1-v} - 1} \cdot \frac{1}{1-v} \\
&= 2D \cdot \frac{\left(\frac{1+v}{1-v}\right)^k - 1}{1+v-1+v} \\
&= 2D \left(\left(\frac{1+v}{1-v}\right)^k - 1 \right) \frac{1}{2v} \\
&= \frac{D}{v} \left(\left(\frac{1+v}{1-v}\right)^k - 1 \right).
\end{aligned}$$

Betrachten wir nun noch einmal die Zeit T_F , die zum Schluss, wenn alle Agenten informiert wurden, benötigt wird, um mit all diesen Agenten zurück zum Ziel zu laufen. Dies lässt sich aber auch anders formulieren. Es ist nämlich die Zeit, die der zuletzt informierte Agent benötigt, um zum Ursprung zurückzukehren $D + v \sum_{i=0}^{k-1} T_i$ plus die Strecke D zum Ziel

$$\begin{aligned}
T_F &= D + v \sum_{i=0}^{k-1} T_i + D \\
&= D + v \cdot \frac{D}{v} \left(\left(\frac{1+v}{1-v}\right)^k - 1 \right) + D \\
&= D + D \cdot \left(\frac{1+v}{1-v}\right)^k - D + D \\
&= D \left(\frac{1+v}{1-v}\right)^k + D.
\end{aligned}$$

Wenn wir das alles in Gleichung (15) einsetzen, so erhalten wir für den kompetitiven Faktor dieser vorgestellten Strategie:

$$\begin{aligned}
C &= \frac{1}{v} + \frac{1}{v} \left(\frac{1+v}{1-v}\right)^k - \frac{1}{v} + \left(\frac{1+v}{1-v}\right)^k + 1 \\
&= 1 + \left(\frac{1}{v} + 1\right) \left(\frac{1+v}{1-v}\right)^k
\end{aligned}$$

Durch Nullsetzen der ersten Ableitung nach v erhalten wir ein Minimum im zulässigen Intervall $[0; 1]$ für $v_{\min} := \frac{1}{2k+1}$. Eingesetzt erhalten wir

$$\begin{aligned} &= 1 + \left(\frac{1}{\frac{1}{2k+1}} + 1 \right) \left(\frac{1 + \frac{1}{2k+1}}{1 - \frac{1}{2k+1}} \right)^k \\ &= 1 + (2k + 2) \left(\frac{2k + 2}{2k} \right)^k \\ &= 1 + 2 \frac{(k + 1)^{k+1}}{k^k}, \end{aligned}$$

Damit haben wir folgendes Theorem bewiesen.

Theorem 11 *Es gibt eine monotone Strategie um parallel auf m Strahlen zu suchen, die einen kompetitiven Faktor von*

$$1 + 2 \frac{(k + 1)^{k+1}}{k^k},$$

mit $k = \lceil \log m \rceil$ erzielt, wenn der Abstand zwischen Ursprung und Ziel nach unten nicht beschränkt ist.

4.2 Untere Schranke für monotone Strategien

Nun, da wir schon eine Strategie präsentiert haben welche den in Theorem 11 bezeichneten kompetitiven Faktor erzielt, wollen wir zeigen, dass es keine monotone Strategie gibt, die einen besseren kompetitiven Faktor besitzt. Wir betrachten also eine beliebige monotone Strategie. Die Agenten bewegen sich mit der Zeit kontinuierlich und monoton mit beliebiger Geschwindigkeit entlang der Strahlen, bis einer von ihnen das Ziel gefunden hat. Dieser Agent läuft nun mit Höchstgeschwindigkeit zu einem der anderen Agenten, um diese Information weiter zu geben. Daraufhin reisen beide - noch immer mit Höchstgeschwindigkeit - zu zwei anderen Agenten, geben auch dort die Information weiter, und so weiter. Wenn alle Agenten wissen, wo sich das Ziel befindet, gehen sie schnellstmöglich dort hin.

Seien $v_1(T), v_2(T), \dots, v_m(T)$ die durchschnittlichen Geschwindigkeiten der m Agenten bis zum Zeitpunkt T , d.h. einfach der Abstand des jeweiligen Agenten zum Ursprung geteilt durch die Zeit T , die bis dahin vergangen ist. Klar ist, dass die Suchstrategie und deren kompetitiver Faktor ausschließlich von den Durchschnittsgeschwindigkeiten der m Agenten abhängt. Wir erhalten die folgende untere Schranke.

Lemma 12 *Es existiert keine monotone Suchstrategie, die einen besseren kompetitiven Faktor, als*

$$1 + 2 \frac{(k + 1)^{k+1}}{k^k},$$

für $k = \lceil \log m \rceil$ erzielt, um auf m Strahlen mit m Agenten parallel zu suchen.

Beweis. Wie schon des Öfteren, setzen wir den Zielpunkt erst dann, wenn wir ihn für unsere Berechnungen brauchen, sodass wir den kompetitiven Faktor noch maximieren können. Um dieses Maximum dann als untere Schranke zu beweisen, verwenden wir eine ähnliche Beweistechnik, wie schon in Lemma 3, nur mit dem Unterschied, dass wir nicht betrachten werden, was passiert, wenn das Ziel nahe Unendlich liegt, sondern nahe der Null.

Als erstes stellen wir sicher, dass jeder der m Agenten jeweils auf einem anderen Strahl sucht, denn sonst könnten wir das Ziel auf einen unbesuchten Strahl legen, um den kompetitiven Faktor gegen Unendlich laufen zu lassen. Seien $v_{\max} = \lim_{T \rightarrow 0} \max\{v_i(T)\}$ und $v_{\min} = \lim_{T \rightarrow 0} \min\{v_i(T)\}$, für $1 \leq i \leq m$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $\lim_{T \rightarrow 0} v_1(T) = v_{\min}$ und $\lim_{T \rightarrow 0} v_2(T) = v_{\max}$ gilt, andernfalls nummerieren wir die Geschwindigkeits-Funktionen so um, dass diese Behauptung erfüllt ist.

Angenommen es gilt $v_{\max} = 1$, dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $T_\varepsilon > 0$, sodass

$$v_2(T) \geq 1 - \varepsilon, \quad (16)$$

für alle $T \leq T_\varepsilon$ gilt. Dann suchen wir uns einen Zeitpunkt T_D , mit

$$T_D < \frac{T_\varepsilon}{1 + 2 \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}}, \quad (17)$$

für $k = \lceil \log m \rceil$, und setzen das Ziel mit Abstand $v_1(T_D) \cdot T_D$ zum Ursprung auf den ersten Strahl. Sei Agent a_1 derjenige, der versucht einen weiteren Agenten a_2 einzuholen, und T_2 die Zeit, die er dafür braucht. Der kompetitive Faktor für jede monotone Strategie ist durch diese Zeit T_2 beschränkt.

$$C \geq \frac{T_2}{v_1(T_D)T_D}.$$

T_2 lässt sich aber auch schreiben als

$$T_2 \geq v_1(T_D)T_D + v_2(T_D + T^* + T_2)(T_D + T_2),$$

mit T^* als die Zeit, die ab dem Finden des Ziels vergeht, bis Agent a_1 beginnt, Agent a_2 zu jagen. Allerdings stört in diesem Term, dass am Ende erneut T_2 steht. Das können wir vermeiden, wenn wir wieder die relative Geschwindigkeit zwischen beiden Agenten betrachten, denn dann schreiben wir

$$T_2 \geq \frac{v_1(T_D)T_D + v_2(T_D + T^* + T_2)T_D}{1 - v_2(T_D + T^* + T_2)},$$

und erhalten

$$C \geq \frac{\frac{v_1(T_D)T_D + v_2(T_D + T^* + T_2)T_D}{1 - v_2(T_D + T^* + T_2)}}{v_1(T_D)T_D}.$$

Nehmen wir weiter an, dass Agent a_2 noch vor dem Zeitpunkt T_ε erreicht wird, dann verwenden wir Ungleichung (16) und es gilt

$$\begin{aligned} C &\geq \frac{\frac{v_1(T_D)T_D + v_2(T_D + T^* + T_2)T_D}{1 - v_2(T_D + T^* + T_2)}}{v_1(T_D)T_D} \geq \frac{\frac{v_1(T_D)T_D + (1-\varepsilon)T_D}{1 - (1-\varepsilon)}}{v_1(T_D)T_D} \\ &= \frac{\frac{v_1(T_D)T_D}{\varepsilon}}{v_1(T_D)T_D} + \frac{(1-\varepsilon)T_D}{\varepsilon v_1(T_D)T_D} = \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1-\varepsilon}{v_1(T_D)\varepsilon} \\ &\geq \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}, \end{aligned}$$

was beliebig gross werden kann. Wenn Agent a_2 jedoch erst nach dem Zeitpunkt T_ε eingeholt wird, dann gilt

$$C \geq \frac{T_D + T^* + T_2}{v_1(T_D)T_D} \geq \frac{T_\varepsilon}{v_1(T_D)T_D},$$

und setzen wir Ungleichung (17) nach T_ε aufgelöst ein, erhalten wir

$$C \geq 1 + 2 \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k},$$

weil $v_1(T_D) \leq 1$. Dies beweist den kompetitiven Faktor für diesen ersten Fall $v_{\max} = 1$.

Für den zweiten Fall nehmen wir an, dass $v_{\max} < 1$ ist, dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $T_\varepsilon > 0$, sodass $v_{\min} - \varepsilon \leq v_1(T) \leq v_{\min} + \varepsilon < 1$ und $v_{\min} - \varepsilon \leq v_i(T) \leq 1$, für alle $T \leq T_\varepsilon$ und $2 \leq i \leq m$. Wir setzen den Zielpunkt im Abstand $D = v_1(T_D)T_D$ auf den ersten Strahl. T_D wird dabei so gewählt, dass gilt

$$T_D < \frac{T_\varepsilon}{2 + 4 \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}}, \quad (18)$$

für $k = \lceil \log m \rceil$. Hat ein Agent erstmal das Ziel gefunden, können wir die Agenten in zwei Typen einteilen. Diejenigen, die wissen wo das Ziel liegt, nennen wir Jäger, und die restlichen, die noch suchen, nennen wir Beute. Zu Beginn, also zum Zeitpunkt T_D , ist nur der erste Agent ein Jäger und alle anderen sind Beute.

Wir bezeichnen mit T_n den ersten Zeitpunkt, an dem genau n der m Agenten Jäger sind. Wenn $T_m > T_\varepsilon/2$ ist, dann überschreitet der kompetitive Faktor

$$\frac{T_m}{v_1(T_D)T_D} > \frac{T_\varepsilon}{2v_1(T_D)T_D} \stackrel{(18)}{>} 1 + 2 \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k},$$

mit $k = \lceil \log m \rceil$, was unsere Aussage beweist.

Wenn nun aber $T_m \leq T_\varepsilon/2$ ist, dann verwenden wir Induktion über n , um folgendes zu beweisen

$$T_n \geq T_D \left(1 + 2 \frac{v_{\min} - \varepsilon}{1 - v_{\min} + \varepsilon} \right)^{\lceil \log n \rceil}.$$

Der Induktionsanfang $n = 1$ folgt direkt hieraus, da wir wissen, dass $T_1 = T_D$. Für $n > 1$ müssen wir die Behauptung noch beweisen. Das machen wir wie folgt. Die Zeit T_n ist selbstverständlich nicht fallend bezüglich n , d.h. der Zeitpunkt T_{n_1} kann nicht vor dem Zeitpunkt T_n liegen, mit $n < n_1$. Betrachte den Zeitpunkt T_n , für ein bestimmtes n . Zu einem Zeitpunkt vor T_n sind mindestens $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ Agenten vom Typ Jäger. Wäre dem nicht so, also wären nur $n' < \lceil \frac{n}{2} \rceil$ Agenten von diesem Typ, so wäre die höchst mögliche Anzahl an Agenten, die zum Zeitpunkt T_n Jäger sein können $2n'$, mit $2n' < n$, da schliesslich jeder Jäger nur höchstens einen neuen Jäger erzeugen kann. Der Widerspruch ist deutlich, denn zum Zeitpunkt T_n haben wir genau n Jäger. Aus dem selben Grund gibt es auch jeweils einen Agenten vom Typ Jäger sowie einen vom Typ Beute, die sich nicht vor dem Zeitpunkt $T_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ treffen. Bezeichne den Zeitpunkt des Zusammentreffens mit T . Danach jagt einer der Agenten, sei dies a_J einen Agenten a_B vom Typ Beute und trifft ihn zur Zeit T' , nicht später als zum Zeitpunkt T_n . Sei $T_R = T' - T$. Dann gilt

$$T_n \geq T_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + T_R,$$

mit

$$\begin{aligned} T_R &\geq \min_{T_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \leq T \leq T_n} \{v_J(T)T + v_B(T + T_R) \cdot (T + T_R)\} \\ &\geq \min_{T \leq T_n} \{v_J(T)\} T_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + \min_{T \leq T_n} \{v_B(T + T_R)\} (T_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + T_R). \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} T_R &\geq T_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \frac{\min_{T \leq T_n} \{v_J(T)\} + \min_{T \leq T_n} \{v_B(T + T_R)\}}{1 - \min_{T \leq T_n} \{v_B(T + T_R)\}} \\ &\geq 2T_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \frac{v_{\min} - \varepsilon}{1 - v_{\min} + \varepsilon}, \end{aligned}$$

denn $T_n + T_R \leq 2T_m \leq T_\varepsilon$.

Von oben wissen wir, dass

$$\begin{aligned} T_n &\geq T_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + 2T_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \frac{v_{\min} - \varepsilon}{1 - v_{\min} + \varepsilon} \geq T_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \left(1 + 2 \frac{v_{\min} - \varepsilon}{1 - v_{\min} + \varepsilon} \right) \\ &\geq T_1 \left(1 + 2 \frac{v_{\min} - \varepsilon}{1 - v_{\min} + \varepsilon} \right)^{\lceil \log n \rceil} = T_D \left(1 + 2 \frac{v_{\min} - \varepsilon}{1 - v_{\min} + \varepsilon} \right)^{\lceil \log n \rceil}, \end{aligned}$$

aus unserer Induktionsannahme.

Also sind ab dem Zeitpunkt T_m alle Agenten Jäger. Angenommen, der letzte Agent der zum Jäger wird sei Agent a_L . Wenn mehr als ein Agent zu diesem Zeitpunkt Jäger wird, nehmen wir an, dass a_L derjenige von ihnen ist, mit der kleinsten Durchschnittsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt T_m . Der kompetitive Faktor einer jeden monotonen Strategie kann nun wie folgt abgeschätzt

werden.

$$\begin{aligned}
C &\geq \frac{T_m + v_L(T_m) \cdot T_m + D}{D} = 1 + \frac{T_m + v_L(T_m) \cdot T_m}{v_L(T_D) \cdot T_D} \\
&\geq 1 + \left(1 + 2 \frac{v_{\min} - \varepsilon}{1 - v_{\min} + \varepsilon}\right)^{\lceil \log m \rceil} \cdot \frac{1 + v_{\min} - \varepsilon}{v_{\min} + \varepsilon} \\
&\stackrel{k=\lceil \log m \rceil}{=} 1 + \left(\frac{1 + v_{\min} - \varepsilon}{1 - v_{\min} + \varepsilon}\right)^k \cdot \frac{1 + v_{\min} - \varepsilon}{v_{\min} + \varepsilon} \\
&= 1 + \frac{(1 + v_{\min})^{k+1}}{v_{\min}(1 - v_{\min})^k} - \Theta(\varepsilon)
\end{aligned}$$

Leiten wir diese Funktion in Abhängigkeit von $v_{\min}$ ab und setzen diese gleich Null, so erhalten wir im zulässigen Intervall $[0; 1]$ ein Minimum für $v_{\min} = \frac{1}{2k+1}$. Setzen wir dies ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
C &\geq 1 + \frac{(1 + \frac{1}{2k+1})^{k+1}}{\frac{1}{2k+1} \cdot (1 - \frac{1}{2k+1})^k} - \Theta(\varepsilon) \\
&= 1 + 2 \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k} - \Theta(\varepsilon).
\end{aligned} \tag{19}$$

Dieser Ausdruck läuft gegen $1 + 2 \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}$, wenn ε gegen 0 läuft, was unseren Beweis vollständig macht. $\square$

4.3 Untere Schranke für beliebige Strategien

Nun, wo wir monotone Strategien betrachtet haben, können wir schauen, wie es sich mit beliebigen Strategien verhält, und beweisen folgendes Theorem.

Theorem 13 *Es existiert keine Strategie, die einen besseren kompetitiven Faktor bei der parallelen Suche auf m Strahlen als*

$$1 + 2 \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k},$$

mit $k = \lceil \log m \rceil$, erreicht.

Beweis. Jede Strategie kann durch die Funktionen der durchschnittlichen Geschwindigkeiten $v_1(T), \dots, v_m(T)$ ihrer m Agenten beschrieben werden. (Zusammen mit der Information, ob und wann ein Agent den Strahl wechselt.) Seien diese Geschwindigkeits-Funktionen gegeben, so können wir ermitteln, für welche Zeitspanne sich ein Agent monoton auf einem Strahl bewegt. (Dies beinhaltet auch die Zeit, die ein Agent im Ursprung verweilt.) Sei T_i die Zeit, in der sich ein Agent monoton entlang eines Strahls bewegt. Jedes dieser T_i ist grösser als 0, denn entweder steht ein Agent an einer Stelle,

oder er bewegt sich entlang eines Strahls. Wenn $T_\varepsilon = \min_{1 \leq i \leq m} \{T_i\}$, dann setzen wir, ähnlich wie in den vorherigen Beweisen, das Ziel an eine möglichst ungünstige Stelle. Hier ist das auf einem der m Strahlen, sagen wir Strahl r_1 , im Abstand $D = v_1(T_D) \cdot T_D$ vom Ursprung, sodass $T_D < \frac{T_\varepsilon}{1 + 2 \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}}$, für $k = \lceil \log m \rceil$. Benötigt die Strategie mehr als T_ε Zeit, so ist der kompetitive Faktor natürlich nach unten beschränkt durch

$$1 + 2 \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k},$$

mit $k = \lceil \log m \rceil$. Wenn die Strategie aber weniger als T_ε Zeit benötigt, dann ist sie monoton im betrachteten Intervall und wir können Lemma 12 anwenden, womit unsere Behauptung bewiesen ist. $\square$

5 Fazit

Wir haben Suchstrategien betrachtet, mittels denen man parallel auf m sternförmig aus dem Ursprung zeigenden Strahlen nach einem Ziel suchen kann. Wir haben gezeigt, dass eine einfache Strategie, die wir als Doubling-Strategie bezeichnet haben, vom Suchen auf der Zahlengerade ($m = 2$) mit zwei Agenten bis hin zum Suchen auf $m > 2$ Strahlen mit m Agenten, zu einem kompetitiven Faktor von 9 geführt hat, wenn im Voraus eine untere Schranke für den Abstand des Ziels zum Ursprung bekannt ist. Desweiteren haben wir gezeigt, dass in diesem Fall 9 eine untere Schranke für den kompetitiven Faktor von monotonen als auch von symmetrischen Strategien ist. Zudem haben wir bewiesen, dass

$$1 + 2 \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}$$

eine untere Schranke für den kompetitiven Faktor von jeglichen Strategien ist, wenn nicht im Voraus bekannt ist, welchen Mindestabstand das Ziel zum Ursprung besitzt. Zum Schluss haben wir auch eine Strategie präsentiert, die diesen kompetitiven Faktor besitzt, unabhängig davon, ob ein Mindestabstand vereinbart wurde oder nicht. Somit haben wir optimale Suchstrategien für verschiedene Probleme vorgestellt.

Literatur

- [1] R. Baeza-Yates and R. Schott. Parallel searching in the plane. *Comput. Geom. Theory Appl.*, 5:143–154, 1995.
- [2] S. Gal. *Search Games*. Academic Press, 1980.
- [3] M. S. M.-Y. Kao, Y. Ma and Y. Yin. Optimal constructions of hybrid algorithms. In *Proc. 5th ACM-SIAM Sympos.*, Discrete Algorithms, pages 372–381, 1994.
- [4] B. J. N. Mikael Hammar and S. Schuierer. Parallel searching on m rays.
- [5] J. C. R. Baeza-Yates and G. Rawlins. Searching in the plane. *Information and Computation*, 106:234–252, 1993.
- [6] S. Schuierer. Lower bounds in on-line geometric searching. In *Proc of the 11th International Symp. on Fundamentals of Computation Theory*, pages 429–440, 1997. LNCS 1279.
- [7] Y. Yin. *Teaching, Learning and Exploration*. PhD thesis, Department of Mathematics and Laboratory for Computer Science, MIT, 1994.