Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn
Institut für Informatik I

Jannis Warnat

Säubern eines Graphen liegt in NP

30. Januar 2008

Seminararbeit im WS 2007/2008

Zusammenfassung

Diese Ausarbeitung behandelt den Artikel *Recontamination does not help to search a graph* von Andrea S. LaPaugh [1]. Es geht um das Spiel *Säubern eines Graphen*: ein zu Anfang vollständig *verseuchter* Graph soll mit Hilfe von *Reinigern*, die nach bestimmten Regeln über die Kanten des Graphen bewegt werden, gesäubert werden. Bestimmte Reinigungsstrategien können dazu führen, daß bereits gereinigte Kanten rekontaminiert werden. LaPaugh beweist die von Megiddo et al. [2] geäußerte Vermutung, daß jeder Graph auch *ohne* das Auftreten einer Rekontamination mit einer minimalen Anzahl an Reinigern gesäubert werden kann. Daraus folgt, daß *Säubern eines Graphen* in NP liegt. Zusammen mit der von Megiddo et al. bewiesenen NP-Schwere des Problems ergibt dies den Nachweis der NP-Vollständigkeit.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Wir betrachten zunächst die Regeln des Spiels *Säubern eines Graphen.* Ein vollständig verseuchter, ungerichteter Graph soll mit *möglichst wenigen Reinigern* vollständig gesäubert werden. Dem Spieler sind folgende Spielzüge erlaubt:

(1) Setze einen Reiniger auf einen Knoten.

(2) Entferne einen Reiniger von einem Knoten.

(3) Bewege einen Reiniger über eine Kante.

Wir definieren ein paar Begriffe für die Knoten. Ein Knoten ist

- *bewacht*, wenn er von einem Reiniger besetzt ist;
- *sauber*, wenn alle seine eingehenden Kanten sauber sind;
- *verseucht*, wenn alle seine eingehenden Kanten verseucht sind;
- *teilweise sauber*, wenn seine eingehenden Kanten teilweise sauber und teilweise verseucht sind.

Ein *bewachter Pfad* führt über mindestens einen bewachten Knoten. Eine verseuchte Kante kann auf zwei Weisen gereinigt werden:

- Zwei Reiniger stehen auf dem gleichen Endpunkt einer verseuchten Kante. Einer der beiden wird über die Kante zum anderen Endpunkt bewegt.
- Ein einzelner Reiniger steht auf einem Knoten, der bis auf eine eingehende Kante sauber ist. Der Reiniger wird über die einzige verseuchte Kante bewegt.

Wir betrachten diskrete *Spielstände* vor oder nach einem Zug, gegeben durch die Menge der verseuchten Kanten und die Menge der bewachten Knoten. Eine schon gereinigte Kante e wird *rekontaminiert*, wenn ein Zug einen Spielstand zur Folge hat, in dem ein Pfad über unbewachte Knoten von einer verseuchten Kante zur Kante e existiert.

Megiddo et al. [2] hatten bereits gezeigt, daß das Entscheidungsproblem

Gegeben seien ein Graph G und eine natürliche Zahl k. Kann G mit höchstens k Reinigern gesäubert werden?

NP-schwer ist. Desweiteren hatten sie die Vermutung geäußert, daß für jeden Graphen eine Reinigungsstrategie (eine Folge von Zügen, die den zu Anfang vollständig verseuchten Graphen vollständig säubert) existiert, die den Graphen mit der *minimalen* Anzahl an Reinigern auch *ohne* das Auftreten einer

Rekontamination säubert. Das hätte zur Folge, daß das Entscheidungsproblem in NP liegt. Ein Orakel würde einfach die Reihenfolge raten, in der die Kanten gereinigt werden. Anschließend können wir in polynomieller Zeit überprüfen, ob die Kanten mit k Reinigern in dieser Reihenfolge gesäubert werden können. Wir reinigen jede Kante der Reihenfolge nach auf eine der zwei oben beschriebenen Weisen. Dazu müssen wir jeweils maximal zwei Reiniger auf einen Endpunkt der Kante setzen und einen Reiniger über die Kante bewegen. Ist nach der Reinigung der Kante ein sauberer Knoten bewacht, entfernen wir den Reiniger von diesem Knoten.

Im folgenden wollen wir die Vermutung beweisen.

2 Das Problem wird transformiert

Wir transformieren zunächst unser Spiel. Nach jedem Zug sollen nun zwei Bedingungen erfüllt sein:

(I) Kein Reiniger steht auf einem sauberen oder einem verseuchten Knoten.

(II) Auf keinem Knoten steht mehr als ein Reiniger.

Desweiteren gibt es nun zwei Arten von Spielzügen:

- *Reinigungszug*
  (1) Setze eine Anzahl Reiniger auf beliebige Knoten.
  (2) Reinige genau eine Kante nach den Regeln des ursprünglichen Spiels.
  (3) Entferne alle Reiniger, die Bedingungen (I) und (II) nicht erfüllen.
- *Rekontaminierungszug*
  (1) Entferne eine Anzahl Reiniger.
  (2) Setze eine Anzahl Reiniger auf unbewachte Knoten.
  (3) Rekontaminiere alle Kanten, die in der jetzigen Situation nach den Regeln des ursprünglichen Spiels rekontaminiert würden.
  (4) Entferne alle Reiniger, die Bedingungen (I) und (II) nicht erfüllen.

Lemma 1 *Für jede Reinigungsstrategie nach den alten Spielregeln, die mit k Reinigern auskommt, gibt es eine Reinigungsstrategie nach den neuen Spielregeln, die mit k Reinigern auskommt.*

Beweis. Sei s_a ein beliebiger Spielstand im ursprünglichen Spiel, beschrieben durch die Menge der verseuchten Kanten und die Menge der bewachten Knoten. Sei s_n ein Spielstand nach den neuen Regeln, der also die Bedingungen (I) und (II) erfüllt. Es gelte außerdem:

(A) In s_a und s_n ist die Menge der verseuchten Kanten gleich.

(B) In s_n ist die Menge der bewachten Knoten eine Teilmenge der in s_a bewachten Knoten.

Wir beweisen das Lemma per Induktion über die Anzahl der Spielzüge nach den alten Regeln. Der vollständig verseuchte, unbewachte Graph nach null Zügen bildet den Induktionsanfang. Hier sind (A) und (B) offensichtlich erfüllt. Wir zeigen nun, daß es für jeden Spielzug m_a, der einen Spielstand s_a nach den alten Regeln in einen Spielstand s_{a+1} überführt, einen Spielzug m_n gibt, der einen äquivalenten Spielstand s_n nach den neuen Regeln in einen Spielstand s_{n+1} überführt, so daß die resultierenden Spielstände wiederum äquivalent sind im Sinne der Aussagen (A) und (B). Damit können wir alle Züge in der Reinigungsstrategie nach den alten Regeln durch Züge nach den neuen Regeln ersetzen, ohne zusätzliche Reiniger aufzuwenden. Am Ende ist der Graph vollständig sauber und alle Knoten sind unbewacht.

Von den k Reinigern, die uns insgesamt zur Verfügung stehen, bezeichnen wir diejenigen, die sich nicht auf dem Graphen befinden, als *freie Reiniger*. Es gibt bekanntlich drei mögliche Züge für m_a nach den alten Regeln:

(1) Setze einen Reiniger auf einen Knoten. Dann ist m_n ein leerer Zug. Es ist leicht zu sehen, daß (A) und (B) weiterhin erfüllt sind.

(2) Entferne einen Reiniger von einem Knoten. Zunächst ist m_n ein leerer Zug, solange das Entfernen des Reinigers nicht zu Rekontaminationen nach den alten Regeln führt. Rekontaminationen finden nicht statt, wenn der Knoten vor m_a verseucht, sauber oder mehrfach besetzt war. Der entfernte Reiniger hat keine Entsprechung in s_n, daher sind (A) und (B) weiterhin erfüllt. Rekontaminationen können nur dann auftreten, wenn in m_a der einzige Reiniger von einem teilweise sauberen Knoten entfernt wird. Teilweise saubere Knoten sind auch in s_n immer von einem Reiniger besetzt, da in s_a und s_n die Menge der verseuchten Kanten gleich ist. Wir können also folgenden Rekontaminierungszug nach den neuen Regeln ausführen:

    (1) Entferne den Reiniger vom selben, teilweise sauberen Knoten, von dem in m_a der Reiniger entfernt wurde.

    (2) Setze freie Reiniger auf all jene Knoten, die in Spielstand s_a bewacht und in Spielstand s_n unbewacht waren.

    (3) Rekontaminiere.

    (4) Entferne alle Reiniger, die die Bedingungen (I) und (II) der neuen Regeln nicht erfüllen.

    Für Schritt (2) sind genügend freie Reiniger vorhanden, weil (B) vor m_n erfüllt ist.

(3) Bewege einen Reiniger über eine Kante e. Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden:

- Die Kante e war verseucht und wird durch den Zug m_a gereinigt. Wir können folgenden Reinigungszug nach den neuen Regeln ausführen:
  (1) Setze solange freie Reiniger auf Knoten bis die gleiche Belegung wie in Spielstand s_a hergestellt ist inklusive Mehrfachbelegungen.
  (2) Reinige e genau wie in m_a.
  (3) Entferne alle Reiniger, die Bedingungen (I) und (II) der neuen Regeln nicht erfüllen.
- Die Kante e wird durch den Zug m_a nicht gereinigt. Wenn der gezogene Reiniger vor m_a auf einem sauberen oder verseuchten Knoten stand, ändert die Kante nicht ihren Zustand. Der Knoten ist vor m_n unbewacht; m_n ist also ein leerer Zug und (A) und (B) bleiben erfüllt. Wenn der gezogene Reiniger auf einem mehrfach belegten, teilweise sauberen Knoten stand und über eine vor m_a saubere Kante e gezogen wird, ändert e ebenfalls nicht ihren Zustand. Dieser Knoten ist vor m_n (einfach) bewacht und bleibt es auch nach m_a. Der Zug m_n ist wiederum leer und (A) und (B) bleiben erfüllt. Nur wenn der in m_a gezogene Reiniger vor m_a als einziger Reiniger auf einem teilweise sauberen Knoten stand, werden in m_a Kanten rekontaminiert. In diesem Fall muß m_n folgender Rekontaminierungszug sein:
  (1) Entferne den Reiniger von dem teilweise sauberen Knoten, von dem aus in m_a der Reiniger über e bewegt wurde.
  (2) Setze den Reiniger auf den anderen Endpunkt von e. Setze Reiniger auf all jene Knoten, die in Spielstand s_a bewacht und in Spielstand s_n unbewacht waren mit Ausnahme der Endpunkte von e.
  (3) Rekontaminiere.
  (4) Entferne alle Reiniger, die die Bedingungen (I) und (II) der neuen Regeln nicht erfüllen.

$\square$

Lemma 2 *Für jede Reinigungsstrategie nach den neuen Spielregeln, die mit k Reinigern und ohne Rekontaminationen auskommt, gibt es eine Reinigungsstrategie nach den alten Spielregeln, die mit k Reinigern und ohne Rekontaminationen auskommt.*

Beweis. Eine Reinigungsstrategie nach den neuen Regeln, die ohne Rekontaminationen auskommt, besteht ausschließlich aus Reinigungszügen. Reinigungszüge nach den neuen Regeln bestehen vollständig aus erlaubten Zügen nach den alten Regeln, von denen keiner zu Rekontaminationen führt. □

Wir wollen nun beweisen, daß Rekontaminationen uns in einem Spiel nach den neuen Regeln nicht dabei helfen, mit weniger Reinigern auszukommen. Mit Hilfe einiger Lemmas werden wir etwaige Rekontaminierungszüge aus einer beliebigen Reinigungsstrategie eliminieren ohne zusätzliche Reiniger aufzuwenden. Am Ende werden wir unsere Erkenntnisse auf Spiele nach den alten Regeln übertragen.

Theorem 3 *Gibt es für einen Graphen eine Reinigungsstrategie nach den neuen Regeln, die mit k Reinigern auskommt, dann gibt es für diesen Graphen auch eine Reinigungsstrategie nach den neuen Regeln, die mit k Reinigern und ohne Rekontaminationen auskommt.*

Wir definieren zunächst ein paar Schreibweisen für Züge nach neuen Regeln.

- R bezeichne die Menge der Knoten, von denen wir in Schritt (1) eines Rekontaminierungszuges Reiniger entfernt haben.
- P bezeichne die Menge der Knoten, auf die wir in Schritt (2) eines Rekontaminierungszuges Reiniger gesetzt haben.
- N_{gr} bezeichne die Menge der bewachten Knoten vor einem Zug.
- $N_{gr}(m_1...m_k)$ bezeichne die Menge der bewachten Knoten nach einer Folge von Zügen $m_1...m_k$
- E_{cntm} bezeichne die Menge der verseuchten Kanten vor einem Zug.
- $E_{cntm}(m_1...m_k)$ bezeichne die Menge der verseuchten Kanten nach einer Folge von Zügen $m_1...m_k$

Wir definieren noch einen nützlichen Begriff für Rekontaminierungszüge.

Definition 4 Ein Rekontaminierungszug heiße *nicht redundant*, falls folgendes gilt:

(i) R und P sind disjunkt.

(ii) In Schritt (4) des Rekontaminierungszuges werden keine Reiniger entfernt. Schritt (4) fällt also weg.

Lemma 5 *Jeder Rekontaminierungszug kann durch einen nicht redundanten Rekontaminierungszug ersetzt werden, der den gleichen Spielstand zur Folge hat.*

Beweis. Der redundante Zug darf in Schritt (2) Reiniger auf Knoten setzen, von denen er in Schritt (1) Reiniger entfernt hat. Der nicht redundante Zug verzichtet darauf, indem er die betreffenden Reiniger in Schritt (1) liegen läßt. In Schritt (4) des redundanten Zuges sollen die Bedingungen (I) und (II) garantiert werden. (II) ist in jedem Fall erfüllt, da wir schon im redundanten Zug nur Reiniger auf unbewachte Knoten gesetzt haben. Was ist mit Reinigern, die Bedingung (I) verletzen?

- Ist ein Knoten v nach Schritt (3) des redundanten Zuges bewacht und verseucht, dann muß jeder Pfad von diesem Knoten zu einer sauberen Kante von einem weiteren Reiniger bewacht sein. Sonst würde die saubere Kante rekontaminiert. Der nicht redundante Zug kann den Reiniger von v in Schritt (1) entfernen bzw. in Schritt (2) darauf verzichten, ihn zu setzen, ohne daß das Einfluß auf die Menge der rekontaminierten Kanten hat.

- Ist ein Knoten v nach Schritt (3) des redundanten Zuges bewacht und sauber, dann muß der Reiniger in Schritt (2) gesetzt worden sein, da vor dem Zug nur teilweise saubere Knoten bewacht waren und keine Reinigungen stattgefunden haben. Jeder Pfad von v zu einer verseuchten Kante muß von einem weiteren Reiniger bewacht sein. Sonst würde eine Kante von v rekontaminiert und v wäre nicht sauber. Der nicht redundante Zug kann in Schritt (2) darauf verzichten, einen Reiniger auf v zu setzen.

□

Ein nicht redundanter Rekontaminierungszug r hat weitere nützliche Eigenschaften:

(iii) $N_{gr}(r) = (N_{gr} \setminus R) \cup P$

(iv) Jeder Knoten aus R ist vor r teilweise sauber und nach r verseucht.

(v) Jeder Knoten aus P ist vor r sauber und nach r teilweise sauber.

3 Lemmas zum Beweis von Theorem 3

3.1 Kombination zweier Rekontaminierungszüge

Zunächst werden wir Rekontaminierungszüge einsparen, indem wir direkt aufeinanderfolgende Rekontaminierungszüge zu einem einzigen Rekontaminierungszug kombinieren. Dadurch wird zudem sichergestellt, daß zwischen zwei Rekontaminierungszügen immer mindestens ein Reinigungszug liegt.

Lemma 6 *Zwei direkt aufeinanderfolgende, nicht redundante Rekontaminierungszüge r_1 und r_2 können zu einem einzigen nicht redundanten Rekontaminierungszug r kombiniert werden, der den gleichen Spielstand wie $r_1 r_2$ zur Folge hat.*

Beweis. Der Zug r sehe folgendermaßen aus:

(1) Entferne alle Reiniger von der Menge R bewachter Knoten, definiert als

$$R := R_1 \cup (R_2 \setminus P_1).$$

(2) Setze Reiniger auf alle (unbewachten) Knoten der Menge

$$P := P_2 \cup (P_1 \setminus R_2).$$

(3) Rekontaminiere.

Wir müssen sicherstellen, daß r nicht mehr freie Reiniger benötigt als r_1r_2, daß aus r und r_1r_2 der gleiche Spielstand resultiert und daß r nicht redundant ist.

Wir zeigen zunächst, daß R und P disjunkt sind. Da die Knoten in R_1 nach r_1 wegen (iv) verseucht sind und die Knoten in P_2 vor r_2 wegen (v) sauber sind, sind R_1 und P_2 disjunkt. Nach (i) sind jeweils R_1 und $P_1 \setminus R_2$ sowie P_2 und $R_2 \setminus P_1$ disjunkt. $R_2 \setminus P_1$ und $P_1 \setminus R_2$ sind offensichtlich disjunkt und damit schließlich auch R und P.

Aus der Disjunktheit von R und P ergibt sich, daß nach r kein Knoten doppelt belegt ist. Denn wäre ein Knoten v nach r von zwei Reinigern belegt, müßte er gleichzeitig $\in N_{gr}$ (also vor r bzw. r_1r_2 einfach belegt) und $\in P$ sein. Da R_2 und P disjunkt sind, ist $v \notin R_2$. Weil v in P_2 oder in P_1 liegen muß, aber nicht in R_2 liegen kann, muß $v \in R_1$ sein, sonst wäre v entweder nach r_1 oder nach r_2 doppelt belegt. Die Züge r_1 und r_2 erfüllen aber die Bedingung (II). Aus $v \in N_{gr} \cap P \cap R_1$ können wir einen Widerspruch herleiten, da R_1 und P wegen $R \cap P = \emptyset$ disjunkt sind. Also kann kein Knoten gleichzeitig $\in N_{gr}$ und $\in P$ und damit nach r doppelt belegt sein.

Um zu zeigen, daß r nicht mehr freie Reiniger als r_1r_2 benötigt, brauchen wir jetzt noch $N_{gr}(r) = N_{gr}(r_1r_2)$.

Einerseits:

$$\begin{aligned}
N_{gr}(r) &= (N_{gr} \setminus R) \cup P \\
&= \Big(N_{gr} \setminus \underbrace{\big(R_1 \cup (R_2 \setminus P_1)\big)}_{=R}\Big) \cup \underbrace{\big(P_2 \cup (P_1 \setminus R_2)\big)}_{=P} \\
&= \Big(\underbrace{\big(N_{gr} \setminus (R_2 \setminus P_1)\big)}_{=N_{gr} \setminus R_2,\text{ da } N_{gr} \cap P_1 = \emptyset} \setminus R_1\Big) \cup (P_1 \setminus R_2) \cup P_2 \\
&= \big(N_{gr} \setminus (R_2 \cup R_1)\big) \cup (P_1 \setminus R_2) \cup P_2
\end{aligned}$$

Andererseits:

$$N_{gr}(r_1r_2) = \big(N_{gr}(r_1) \setminus R_2\big) \cup P_2$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big(\underbrace{\big((N_{gr} \setminus R_1) \cup P_1\big)}_{=N_{gr}(r_1)} \setminus R_2\Big) \cup P_2 \\
&= \big((N_{gr} \setminus R_1) \setminus R_2\big) \cup (P_1 \setminus R_2) \cup P_2 \\
&= \big(N_{gr} \setminus (R_2 \cup R_1)\big) \cup (P_1 \setminus R_2) \cup P_2 \\
&= N_{gr}(r)
\end{aligned}
$$

Um einen identischen Spielstand sicherzustellen, brauchen wir zum Abschluß noch $E_{cntm}(r) = E_{cntm}(r_1 r_2)$. Kanten, die vor r bzw. $r_1 r_2$ verseucht waren, sind auch nach r bzw. $r_1 r_2$ verseucht, da kein Reinigungszug ausgeführt wurde. Wir brauchen also nur rekontaminierte Kanten zu betrachten.

- $E_{cntm}(r) \supseteq E_{cntm}(r_1 r_2)$: Angenommen, eine Kante e ist ursprünglich sauber und nach $r_1 r_2$ verseucht. Wir unterscheiden zwei Fälle:
  - Kante e ist in r_1 rekontaminiert worden. Es gab also in Schritt (3) von r_1 einen unbewachten Pfad von einer verseuchten Kante $\in E_{cntm}$ zu e. Alle Knoten entlang dieses Pfades sind nach r_1 unbewacht und verseucht und waren $\notin P_1$. Zug r_2 setzt keine Reiniger auf verseuchte Knoten, also sind sie gleichfalls $\notin P_2$. Wegen $P = P_2 \cup (P_1 \setminus R_2)$ setzt auch r keine Reiniger auf die Knoten entlang des Pfades; außerdem entfernt r wegen $R \supseteq R_1$ jeden Reiniger, der in r_1 entfernt wird. Der Pfad ist auch in Schritt (3) von r unbewacht und e wird rekontaminiert.
  - Kante e ist in r_2 rekontaminiert worden. Es gab also in Schritt (3) von r_2 einen unbewachten Pfad von einer verseuchten Kante $f \in E_{cntm}(r_1)$ zu e. Wegen $N_{gr}(r) = N_{gr}(r_1 r_2)$ ist dieser Pfad auch in Schritt (3) von r unbewacht. Die Kante f könnte schon vor r_1 verseucht gewesen sein, dann ist sie auch während r verseucht. Sie könnte aber auch in r_1 rekontaminiert worden sein. Für diesen Fall haben wir gerade bewiesen, daß f auch in r rekontaminiert wird. In beiden Fällen existiert ein unbewachter Pfad von einer verseuchten Kante f zu e und e ist auch nach r verseucht.
- $E_{cntm}(r) \subseteq E_{cntm}(r_1 r_2)$: Angenommen, die Kante e ist in r rekontaminiert worden. Es gab also in Schritt (3) von r einen unbewachten Pfad von einer verseuchten Kante $f \in E_{cntm}$ zu e. Wegen $N_{gr}(r) = N_{gr}(r_1 r_2)$ ist dieser Pfad auch in Schritt (3) von r_2 unbewacht. Da in r_1 keine Reinigungen stattfinden, ist f auch vor r_2 verseucht und e wird rekontaminiert.

Aus der Gleichheit der Spielstände nach $r_1 r_2$ bzw. r und der Nichtredundanz von r_2 ergibt sich auch die Nichtredundanz von r, also daß r tatsächlich keinen Schritt (4) benötigt. □

3.2 Aufteilung eines Rekontaminierungszuges

Grundsätzlich unterscheiden wir zwei Arten von Rekontaminierungszügen. Solche, die freie Reiniger verbrauchen und solche, die zusätzliche Reiniger freigeben. Wir müssen diese beiden Arten von Rekontaminierungszügen später unterschiedlich behandeln, um sie aus einer Reinigungsstrategie zu eliminieren. In bestimmten Fällen kann ein Rekontaminierungszug in zwei neue Rekontaminierungszüge aufgeteilt werden, so daß zumindest der erste der beiden zusätzliche Reiniger freigibt.

Definition 7 Sei r ein nicht redundanter Rekontaminierungszug. Eine Knotenmenge C heißt *unbewachte Trennmenge* von R und P, wenn jeder Pfad von einem Knoten in R zu einem Knoten in P entweder einen Knoten aus C oder einen Knoten aus $N_{gr} \setminus R$ enthält. Außerdem sollen C und $N_{gr} \setminus R$ disjunkt sein.

Die Menge C kann keine echte Teilmenge von P sein. Jeder Knoten in P ist vor r sauber und unbewacht und nach r teilweise sauber und bewacht. In Schritt (3) von r muß es von jedem Knoten in P einen unbewachten Pfad zu einem Knoten in R geben. Jeder solche Pfad muß aber einen Knoten aus C enthalten, welche jedoch alle bewacht sind, wenn C eine echte Teilmenge von P ist.

Lemma 8 *Sei m ein nicht redundanter Rekontaminierungszug. Wenn eine minimale unbewachte Trennmenge C mit $|C| < |R|$ und $C \neq P$ existiert, dann kann m in folgende zwei nicht redundante Rekontaminierungszüge m_1 und m_2 aufgeteilt werden. Zug m_1 entfernt die Reiniger von $R_1 := R \setminus C$ und setzt Reiniger auf $P_1 := C \setminus R$, Zug m_2 entfernt die Reiniger von $R_2 := C \setminus P$ und setzt Reiniger auf $P_2 := P \setminus C$. Siehe Abbildung 1 auf Seite 11.*

Beweis. Offensichtlich erfüllen m_1 und m_2 Bedingung (i) für nicht redundante Rekontaminierungszüge. Den Nachweis, daß sie auch die Bedingung (ii) erfüllen, führen wir später. Um m_1 und m_2 den Regeln entsprechend durchführen zu können, müssen wir folgendes sicherstellen:

- Die Knoten in R_1 sind vor Schritt (1) von m_1 bewacht: Alle Knoten in R sind ursprünglich bewacht, also auch alle Knoten in $R_1 = R \setminus C$.
- Die Knoten in P_1 sind vor Schritt (2) von m_1 unbewacht: C und $N_{gr} \setminus R$ sind disjunkt, daher sind ursprünglich alle Knoten in $P_1 = C \setminus R$ unbewacht.
- Es stehen genügend freie Reiniger für die Durchführung von m_1 zur Verfügung: Wir zeigen, daß m_1 ohne freie Reiniger auskommt, weil in Schritt (1) von m_1 mehr Reiniger aufgehoben werden, als in Schritt

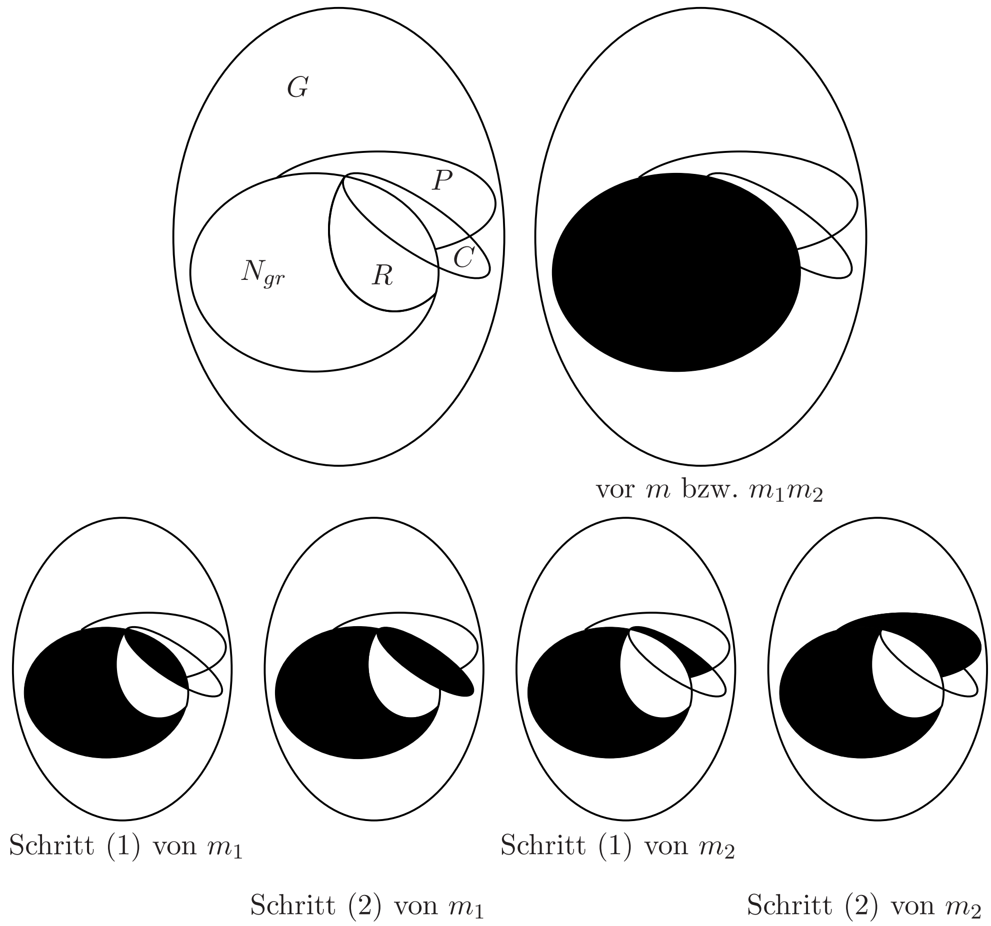

Abbildung 1: Schema der Mengenbeziehungen in Lemma 8. Bewachte Knotenmengen sind schwarz dargestellt. Es gilt $N_{gr}(m) = N_{gr}(m_1m_2)$.

(2) gesetzt werden, also $|P_1| < |R_1|$. Nach Voraussetzung ist $|C| < |R|$. Wir folgern

$$\begin{aligned} |R_1| - |P_1| &= |R \setminus C| - |C \setminus R| \\ &= |R| - |R \cap C| - (|C| - |C \cap R|) \\ &= |R| - |C| > 0. \end{aligned}$$

Der Zug m_1 gibt sogar zusätzliche Reiniger frei.

- Die Knoten in R_2 sind vor Schritt (1) von m_2 bewacht: Alle Knoten in C sind nach m_1 bewacht, also auch alle Knoten in $R_2 = C \setminus P$.

- Die Knoten in P_2 sind vor Schritt (2) von m_2 unbewacht: Nach m_1 ist eine Knotenmenge

  $$N_{gr}(m_1) = \Big(N_{gr} \setminus (R \setminus C)\Big) \cup (C \setminus R) \subseteq N_{gr} \cup C$$

  bewacht. Da N_{gr} und P disjunkt sind und $P_2 = P \setminus C$, sind nach m_1 alle Knoten in P_2 unbewacht.

- Es stehen genügend freie Reiniger für m_2 zur Verfügung: Vor m_2 stehen auf jeden Fall mehr freie Reiniger zur Verfügung als vor m_1, da wie oben gesehen $|R_1| - |P_1| = |R| - |C| > 0$. Zug m_2 benötigt $|P_2| - |R_2| = |P \setminus C| - |C \setminus P| = |P| - |C|$ freie Reiniger. Da schon m_1 mindestens $|R| - |C|$ Reiniger freigibt, könnten wir nur im Fall $|P| > |R|$ Probleme bekommen. In diesem Fall standen aber schon dem ursprünglichen Zug m mindestens $|P| - |R| > 0$ freie Reiniger zur Verfügung. Diese werden von m_1 nicht angerührt. Vor m_2 haben wir dann $|P| - |R| + |R| - |C| = |P| - |C|$ und damit ausreichend viele freie Reiniger.

Die Züge m_1 und m_2 sind durchführbar und benötigen zusammen nicht mehr freie Reiniger als m. Wir beweisen nun, daß aus m und $m_1 m_2$ der gleiche Spielstand resultiert, also zunächst $N_{gr}(m) = N_{gr}(m_1 m_2)$:

$$\begin{aligned} N_{gr}(m_1 m_2) &= \Big(N_{gr}(m_1) \setminus R_2\Big) \cup P_2 \\ &= \Big(\Big((N_{gr} \setminus R_1) \cup P_1\Big) \setminus R_2\Big) \cup P_2 \\ &= \bigg(\Big(\Big(N_{gr} \setminus (R \setminus C)\Big) \cup (C \setminus R)\Big) \setminus (C \setminus P)\bigg) \cup (P \setminus C) \\ &= \Big(\Big(N_{gr} \setminus (R \setminus C)\Big) \setminus (C \setminus P)\Big) \\ &\qquad \underbrace{\cup\Big((C \setminus R) \setminus (C \setminus P)\Big)}_{=\big(C\setminus(C\setminus P)\big)\setminus R=(C\cap P)\setminus R=C\cap P,\text{ da } R \text{ und } P \text{ disjunkt}} \qquad \cup (P \setminus C) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Bigg(N_{gr} \setminus \underbrace{\Big((R \setminus C) \cup (C \setminus P)\Big)}_{=\left(R\setminus(C\setminus P)\right)\cup(C\setminus P)=R\cup(C\setminus P),\text{ da } R \text{ und } P \text{ disjunkt}}\Bigg) \cup (C \cap P) \cup (P \setminus C) \\
&= \underbrace{\Big(N_{gr} \setminus \big(R \cup (C \setminus P)\big)\Big)}_{=(N_{gr}\setminus R)\setminus(C\setminus P)=N_{gr}\setminus R,\text{ da } N_{gr} \setminus R \text{ und } C \text{ disjunkt}} \cup (C \cap P) \cup (P \setminus C) \\
&= (N_{gr} \setminus R) \cup (C \cap P) \cup (P \setminus C) \\
&= (N_{gr} \setminus R) \cup P = N_{gr}(m)
\end{aligned}
$$

Außerdem muß $E_{cntm}(m) = E_{cntm}(m_1 m_2)$ gelten. Wir brauchen erneut nur rekontaminierte Kanten zu betrachten.

- $E_{cntm}(m) \subseteq E_{cntm}(m_1 m_2)$: Sei eine Kante e durch den Zug m rekontaminiert worden. In Schritt (3) von m existiert ein unbewachter Pfad von e zu einem Knoten in R, der also vor m bewacht und teilweise sauber war und nun unbewacht und verseucht ist. Wegen $N_{gr}(m) = N_{gr}(m_1 m_2)$ ist dieser Pfad einschließlich des genannten Knotens in R in Schritt (3) von m_2 ebenfalls unbewacht und e wird rekontaminiert.

- $E_{cntm}(m) \supseteq E_{cntm}(m_1 m_2)$:

  - Sei eine Kante e durch den Zug m_1 rekontaminiert worden. Es existiert also in Schritt (3) von m_1 ein unbewachter Pfad von e zu einem Knoten aus $R_1 = R \setminus C$. Dieser Pfad kann keine Knoten aus $N_{gr} \setminus R$ enthalten, welche durchgehend bewacht sind. Er kann auch keine Knoten aus P enthalten, da er sonst über Knoten aus der Trennmenge C oder aus $N_{gr} \setminus R$ führen müßte, welche nach m_1 alle bewacht sind. Der Pfad enthält demnach keine Knoten aus $N_{gr}(m) = (N_{gr} \setminus R) \cup P$ und ist damit in Schritt (3) von m unbewacht.
  - Siehe für das Folgende Abbildung 2 auf Seite 14. Sei e nun durch m_2 rekontaminiert worden. Es existiert also in Schritt (3) von m_2 ein unbewachter Pfad von e zu einem Knoten $v \in R_2 = C \setminus P$. Dieser Pfad enthält keine Knoten aus P oder $N_{gr} \setminus R$, welche nach m_2 alle bewacht sind. Aus der Minimalität der Trennmenge C können wir folgern, daß es einen Pfad von einem Knoten in P über $v \in C \setminus P$ zu einem Knoten $w \in R$ ($v = w$ ist möglich) geben muß. Das Pfadstück zwischen v und w enthält außer v keine weiteren Knoten aus C und keine Knoten aus $N_{gr} \setminus R$ oder P. Ansonsten wäre C nicht minimal, da wir v aus C entfernen könnten. Der Pfad von w über v zu e ergibt einen unbewachten Pfad in Schritt (3) von m.

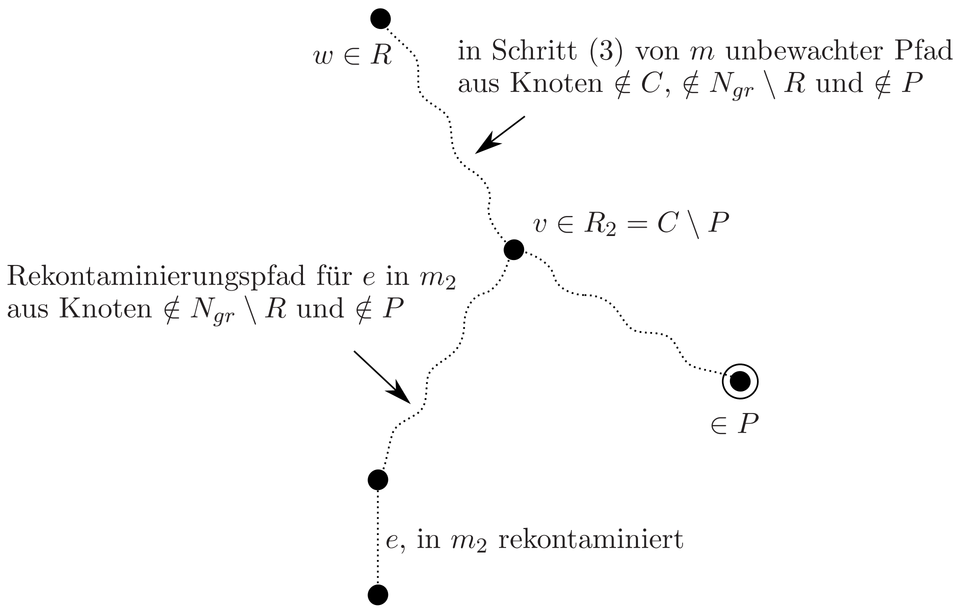

Abbildung 2: Aus Rekontaminierung in m_2 folgt Rekontaminierung in m. Nach m bzw. m_2 verseuchte Kanten sind gestrichelt dargestellt. Der Knoten in P ist nach m bzw. m_2 bewacht. Die Rekontaminierung in m erfolgt von w über v zu e.

Aus der Gleichheit der Spielstände nach m und nach $m_1 m_2$ und der Nichtredundanz von m folgt, daß für m_2 Bedingung (ii) erfüllt ist. Wir benötigen also keinen Schritt (4) und m_2 ist nicht redundant. Es bleibt zu zeigen, daß Bedingung (ii) auch für m_1 erfüllt ist, daß also nach m_1 nur teilweise saubere Knoten bewacht sind. Jeder nach m_1 bewachte Knoten liegt entweder in C oder in $N_{gr} \setminus R$. Jeder Knoten in $N_{gr} \setminus R$ ist ursprünglich bewacht, also teilweise sauber, und nach m_2 immer noch bewacht, also teilweise sauber. Da wir zwischen m_1 und m_2 keinen Reinigungszug ausführen, muß jeder Knoten in $N_{gr} \setminus R$ auch nach m_1 teilweise sauber sein.

Sei g also ein Knoten in C. Aus $g \in C$ und der Minimalität der Trennmenge C können wir folgern, daß g auf einem Pfad p liegt, der von einem Knoten in R zu einem Knoten in P führt und der außer dem Start- und Endpunkt keine weiteren Knoten aus R oder P enthält, sowie außer g keine weiteren Knoten aus C oder $N_{gr} \setminus R$. Siehe für das Folgende Abbildung 3 auf Seite 15.

- Liegt g in R, dann war er vor m_1 bewacht, also teilweise sauber. Nach m_1 kann er nicht sauber sein, da wir keine Kanten gereinigt haben. Er ist also verseucht oder teilweise sauber.

- Liegt g nicht in R, dann liegt p´s Endpunkt in R nicht gleichzeitig in C. Die Kanten des Pfades von diesem Endpunkt in $R \setminus C$ zu g sind

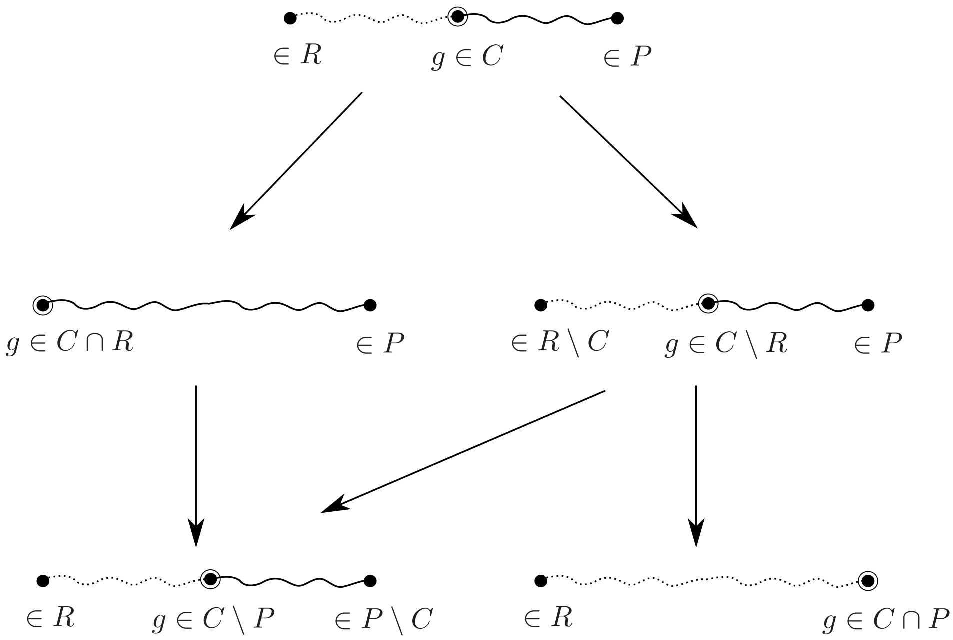

Abbildung 3: Alle Pfade bestehen außer den eingezeichneten Knoten nur aus Knoten $\notin R$, $\notin P$, $\notin C$ und $\notin N_{gr} \setminus R$ und sind nach m_1 unbewacht. Verseuchte Pfad sind gestrichelt dargestellt.

nach m_1 verseucht. Also kann g nicht sauber sein, sondern ist teilweise sauber oder verseucht.

In jedem Fall ist g entweder teilweise sauber oder verseucht.

- Liegt g in P, dann ist er nach m_2 bewacht, also teilweise sauber. Zusammen mit der Tatsache, daß g nach m_1 teilweise sauber oder verseucht war, muß g auch nach m_1 teilweise sauber sein, da keine Reinigungen stattfinden.

- Liegt g in $C \setminus P$, dann kann g nach m_1 nicht verseucht sein. Denn sonst wären alle Kanten auf p zwischen g und p´s Endpunkt in $P \setminus C$ nach m_1 ebenfalls verseucht. Alle Knoten außer g auf diesem Weg sind unbewacht, da sie weder in C noch in $N_{gr} \setminus R$ liegen. Der Endpunkt in $P \setminus C$ ist nach m_1 ebenfalls unbewacht, würde also verseucht werden. Dies kann nicht sein, da er nach m_2 teilweise sauber ist, aber keine Reinigungen stattgefunden haben. Also ist g nach m_1 teilweise sauber.

Fazit: Jeder nach m_1 bewachte Knoten ist teilweise sauber. Kein Reiniger muß in Schritt (4) entfernt werden. Schritt (4) fällt aus und m_1 ist nicht redundant. □

3.3 Vorziehen eines Rekontaminierungszuges

Mit Lemma 6 von Seite 7 können wir jede Reinigungsstrategie so umformen, daß zwei Rekontaminierungszüge immer von mindestens einem Reinigungszug unterbrochen werden. Im folgenden werden wir sehen, daß ein Rekontaminierungszug, der keine freien Reiniger verbraucht, vorgezogen werden kann. Im besten Fall können wir solche Rekontaminierungszüge vor alle Reinigungszüge vorziehen und somit unnötig machen.

Lemma 9 *Sei s_r ein nicht redundanter Rekontaminierungszug, dem unmittelbar ein Reinigungszug s_c vorausgeht, welcher eine Kante e reinigt. Wenn die Zahl freier Reiniger nach s_r mindestens so groß ist wie vor s_r (also $|R_{s_r}| \geq |P_{s_r}|$), können wir s_r und s_c durch einen neuen Rekontaminierungszug t_r und einen neuen Reinigungszug t_c ersetzen, so daß t_r dem Zug t_c vorausgeht und aus der Zugfolge $t_r t_c$ der gleiche Spielstand resultiert wie aus der Zugfolge $s_c s_r$.*

Beweis. Seien m_e und n_e die Endpunkte von e. Grundsätzlich unterscheiden wir zwei Fälle. Entweder wird e in s_r rekontaminiert oder e ist nach s_r sauber. Wir müssen jeweils zeigen, daß die neuen Züge t_r und t_c durchführbar sind und daß aus den Zugfolgen $s_c s_r$ und $t_r t_c$ der gleiche Spielstand resultiert.

- Die Kante e wird in s_r rekontaminiert. In diesem Fall lassen wir t_c leer und überlegen uns nur, was t_r zu tun hat.

  (1) Entferne die Reiniger von den Knoten in

  $$R_{t_r} := \Big(R_{s_r} \setminus \{m_e, n_e\}\Big) \cup \bigg(\Big(\{m_e, n_e\} \cap N_{gr}\Big) \setminus N_{gr}(s_c s_r)\bigg).$$

  In Worten: Wir entfernen in jedem Fall die Reiniger von allen Knoten in R_{s_r} außer m_e und n_e. Von m_e und n_e werden jeweils nur dann Reiniger entfernt, wenn m_e und n_e jeweils einerseits vor $s_c s_r$ bewacht und jeweils andererseits nach $s_c s_r$ unbewacht sind.

  (2) Setze Reiniger auf Knoten in $P_{t_r} := P_{s_r} \setminus \{m_e, n_e\}$

  (3) Rekontaminiere.

  Für die Durchführbarkeit des Zuges t_r müssen wir zunächst zeigen, daß die Knoten in R_{t_r} vor t_r bewacht sind und daß die Knoten in P_{t_r} in Schritt (2) von t_r unbewacht sind. Da sich N_{gr} (Ausgangssituation vor t_r) und $N_{gr}(s_c)$ (Ausgangssituation vor s_r) nur in der Belegung von m_e und n_e unterscheiden können, sind alle Knoten in $P_{t_r} = P_{s_r} \setminus \{m_e, n_e\}$ unbewacht. Alle Knoten in R_{t_r} bis auf eventuell m_e und n_e sind auch in R_{s_r} und daher bewacht. Die Knoten m_e und n_e liegen nur dann in R_{t_r}, wenn sie gleichzeitig in N_{gr} liegen, also bewacht sind.

Desweiteren müssen wir sicherstellen, daß für t_r genügend freie Reiniger zur Verfügung stehen und daß aus den Zügen $s_c s_r$ und t_r jeweils der gleiche Spielstand resultiert. Hierzu unterscheiden wir zwei Unterfälle. Da e nach s_c sauber und nach s_r verseucht ist, muß s_r einen Reiniger von einem Endknoten von e mit Grad ≥ 2 entfernt haben. Wir nehmen ohne Einschränkung an, daß n_e dieser Knoten ist. Im ersten Unterfall ist der Knoten m_e ebenfalls unbewacht. Im zweiten Unterfall ist m_e bewacht.

– Nach s_r ist sowohl n_e als auch m_e unbewacht. Wir kümmern uns zunächst um den Spielstand. Die Mengenpaare (R_{s_r}, R_{t_r}), (P_{s_r}, P_{t_r}) und $\big(N_{gr}, N_{gr}(s_c)\big)$ unterscheiden sich jeweils höchstens darin, ob sie m_e und/oder n_e enthalten. Um also

  $$N_{gr}(t_r) = (N_{gr} \setminus R_{t_r}) \cup P_{t_r} = N_{gr}(s_c s_r) = (N_{gr}(s_c) \setminus R_{s_r}) \cup P_{s_r}$$

  zu zeigen, müssen wir nur überprüfen, ob m_e und n_e nach t_r bzw. $s_c s_r$ im gleichen Belegungszustand sind. Der Zug s_r entfernt alle Reiniger, die nach s_c auf m_e und/oder n_e liegen. Der Zug t_r entfernt alle Reiniger von m_e und/oder n_e, sofern sie in N_{gr} liegen. Sind n_e und/oder m_e vor s_c unbewacht, bleiben sie dies auch nach t_r. Die beiden Knoten m_e und n_e sind nach $s_c s_r$ bzw. t_r im gleichen Zustand und damit gilt $N_{gr}(s_c s_r) = N_{gr}(t_r)$.

  Da in Schritt (3) von t_r und s_r jeweils die gleiche Menge Knoten bewacht ist, folgt auch $E_{cntm}(t_r) = E_{cntm}(s_c s_r)$. Die Kante e wird in s_r rekontaminiert. Die Tatsache, daß e schon vor t_r verseucht ist, führt nicht zur Rekontamination weiterer Kanten. Aus der Gleichheit der Spielstände folgt auch, daß wir auf einen Schritt (4) von t_r und einen neuen Reinigungszug t_c verzichten können. Der Zug t_r ist nicht redundant.

  Wir betrachten nun, ob genügend freie Reiniger für t_r zur Verfügung stehen. Sei δ_1 die Anzahl der Reiniger auf Endpunkten von e vor s_c und δ_2 die Anzahl der Reiniger auf Endpunkten von e nach s_c. Da n_e und m_e nach $s_c s_r$ und nach t_r unbewacht sind, hat s_r die δ_2 Reiniger entfernt und t_r hat die δ_1 Reiniger entfernt. Es gilt

  $$\begin{aligned} |R_{t_r}| &= \underbrace{|R_{s_r}| - \delta_2}_{=|R_{s_r} \setminus \{m_e, n_e\}|} \qquad \underbrace{+\delta_1 - 0}_{=\left|\left(\{m_e,n_e\} \cap N_{gr}\right) \setminus N_{gr}\left(s_c s_r\right)\right|} \\ &= |R_{s_r}| + \delta_1 - \delta_2 \end{aligned}$$

  und wegen $|P_{s_r}| \leq |R_{s_r}|$ und $|P_{t_r}| = |P_{s_r}|$ gilt

  $$|P_{t_r}| \leq |R_{s_r}| = |R_{t_r}| - \delta_1 + \delta_2.$$

Es kann durchaus sein, daß $|R_{t_r}| < |P_{t_r}|$, daß also der Zug t_r mehr Reiniger setzt als er aufhebt. In jedem Fall stehen aber $\delta_2 - \delta_1$ freie Reiniger durch das Auslassen von s_c zur Verfügung und damit genügend Reiniger für die Durchführung von t_r.

– Nach s_r ist m_e bewacht und n_e unbewacht. Die Kante e ist also über n_e rekontaminiert worden. Wir befassen uns zunächst mit dem Spielstand. Der Knoten n_e ist nach s_r unbewacht und daher verseucht. Da m_e bewacht ist, muß er teilweise sauber sein, es muß also mindestens eine saubere, ausgehende Kante geben. Diese Kante ist auch schon vor s_c sauber, da wir in s_c nur e gereinigt haben. Der Knoten m_e ist also auch vor s_c schon teilweise sauber und bewacht. Wenn n_e vor t_r bewacht ist, wird der Reiniger in t_r entfernt; Knoten m_e dagegen bleibt nach der Definition von R_{t_r} bewacht. Wieder sind also m_e und n_e nach t_r bzw. $s_c s_r$ im gleichen Belegungszustand. Daraus folgen wie im vorherigen Unterfall $N_{gr}(t_r) = N_{gr}(s_c s_r)$ und $E_{cntm}(t_r) = E_{cntm}(s_c s_r)$.

  Es bleibt zu zeigen, daß für t_r in jedem Fall genügend Reiniger zur Verfügung stehen. Wegen $n_e \notin N_{gr}(s_c s_r)$, $m_e \in N_{gr}$ und $m_e \in N_{gr}(s_c s_r)$ (und damit $m_e \notin R_{s_r}$) gilt:

$$\begin{aligned} R_{t_r} &= \Big(R_{s_r} \setminus \{m_e, n_e\}\Big) \cup \bigg(\Big(\{m_e, n_e\} \cap N_{gr}\Big) \setminus N_{gr}(s_c s_r)\bigg) \\ &= \Big(R_{s_r} \setminus \{n_e\}\Big) \cup \bigg(\Big(\{m_e\} \cup \Big(N_{gr} \cap \{n_e\}\Big)\Big) \setminus \{m_e\}\bigg) \\ &= \Big(R_{s_r} \setminus \{n_e\}\Big) \cup \Big(N_{gr} \cap \{n_e\}\Big) \end{aligned}$$

  Desweiteren ist $n_e \in N_{gr}$ hier gleichbedeutend mit $n_e \in R_{t_r}$, da auf jeden Fall $n_e \notin N_{gr}(s_c s_r)$. Deshalb gilt:

$$\begin{aligned} |R_{t_r}| &= \Big|\Big(R_{s_r} \setminus \{n_e\}\Big)\Big| + \Big|\Big(N_{gr} \cap \{n_e\}\Big)\Big| \\ &= |R_{s_r}| - \Big|\Big(R_{s_r} \cap \{n_e\}\Big)\Big| + \Big|\Big(R_{t_r} \cap \{n_e\}\Big)\Big| \end{aligned}$$

  Nur wenn n_e in R_{s_r} (also in $N_{gr}(s_c)$, das heißt nach s_c bewacht) und gleichzeitig nicht in R_{t_r} (also nicht in N_{gr}, das heißt vor s_c bzw. t_r unbewacht) liegt, tritt der Fall $|R_{t_r}| = |R_{s_r}| - 1$ und damit $|R_{t_r}| < |R_{s_r}|$ ein. In allen anderen Fällen haben wir

$$|R_{t_r}| \geq |R_{s_r}| \geq |P_{s_r}| \geq |P_{t_r}|$$

  und t_r kommt ohne freie Reiniger aus. Sei also $n_e \in R_{s_r}$ und $n_e \notin R_{t_r}$ und damit $|R_{t_r}| = |R_{s_r}| - 1$. Wenn nun m_e zwischen s_c und s_r unbewacht ist, dann liegt m_e in P_{s_r}. Dann gilt

$$|R_{t_r}| = |R_{s_r}| - 1 \geq |P_{s_r}| - 1 = |P_{t_r}|.$$

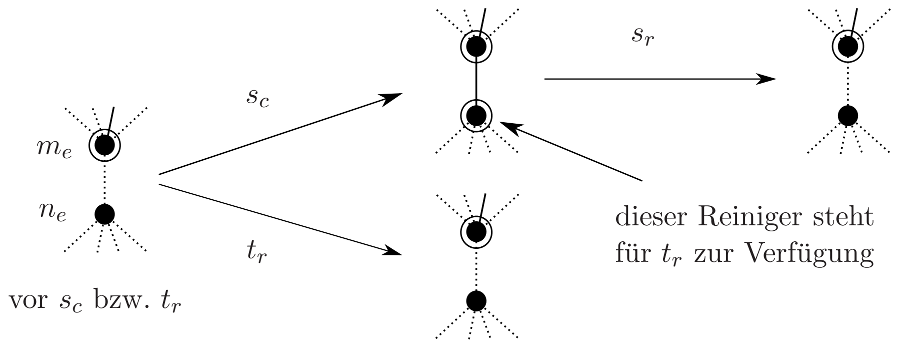

Abbildung 4: Durch das Auslassen von s_c steht für t_r ein zusätzlicher freier Reiniger zur Verfügung.

Das Problem $|R_{t_r}| < |P_{t_r}|$ tritt also nur dann auf, wenn n_e vor s_c unbewacht ist (m_e ist vor s_c in jedem Fall bewacht) und nach s_c sowohl m_e als auch n_e bewacht sind. Siehe dazu Abbildung 4 auf Seite 19. Das Auslassen von s_c bringt uns genau einen freien Reiniger für die Durchführung von t_r. Es stehen

$$|R_{t_r}| + 1 = |R_{s_r}| \geq |P_{s_r}| = |P_{t_r}|$$

und damit ausreichend viele Reiniger zur Verfügung.

- Die Kante e ist nach s_r sauber. Weder m_e noch n_e liegen in R_{s_r}, da m_e und n_e teilweise sauber sind, falls sie vor s_r bewacht sind. Das Entfernen eines Reinigers von m_e oder n_e würde zur Rekontamination von e führen. Unser Beweis ist einfacher, wenn wir zulassen, daß t_r redundant ist:

  (1) Entferne die Reiniger von $R_{t_r} := R_{s_r}$;

  (2) Setze Reiniger auf $P_{t_r} := P_{s_r} \setminus \{m_e, n_e\}$;

  (3) Rekontaminiere;

  (4) Entferne die Reiniger, die die Bedingungen (I) und (II) verletzen.

  Der Zug s_c kann nur den Bewachungszustand der Knoten m_e und n_e verändern. Da alle Knoten in R_{s_r} vor s_r bewacht sind und R_{s_r} weder m_e noch n_e enthält, sind auch alle Knoten in R_{t_r} vor t_r bewacht. Da alle Knoten in P_{s_r} bis auf eventuell m_e und n_e vor s_r unbewacht sind, sind auch alle Knoten in P_{t_r} vor t_r unbewacht. Desweiteren sind genügend Reiniger vorhanden, um t_r durchzuführen, weil

$$|R_{t_r}| = |R_{s_r}| \geq |P_{s_r}| \geq |P_{t_r}|.$$

Allerdings muß nun t_c die Kante e reinigen und wir müssen zeigen daß $t_r t_c$ den gleichen Spielstand wie $s_c s_r$ zur Folge hat. Wir zeigen zunächst

$$E_{cntm}(s_c s_r) = E_{cntm}(t_r) \setminus \{e\},$$

also daß nach $s_c s_r$ und t_r jeweils die gleiche Kantenmenge verseucht ist mit Ausnahme von e. Die Kante e ist nach t_r verseucht und nach $s_c s_r$ sauber.

Der Reinigungszug s_c hinterläßt nur Reiniger auf teilweise sauberen Knoten. Da s_c nur e gereinigt hat, ist der Verseuchungsgrad aller Knoten außer eventuell m_e und n_e gleich geblieben. Die Mengen der bewachten Knoten in Schritt (3) von s_r und t_r unterscheiden sich höchstens in den Endpunkten von e.

Sollte es also in Schritt (3) von s_r einen unbewachten Pfad von einer verseuchten zu einer sauberen Kante geben, der aber in Schritt (3) von t_r bewacht ist, dann müßte dieser Pfad in Schritt (3) von s_r einen unbewachten Endpunkt von e enthalten. Dadurch würde e in s_r rekontaminiert, was im Widerspruch zu unserer Annahme steht, daß e sauber ist.

Siehe für das Folgende Abbildung 5 auf Seite 21. Sollte es umgekehrt in Schritt (3) von t_r einen unbewachten Pfad von einer verseuchten zu einer sauberen Kante geben, der aber in Schritt (3) von s_r bewacht ist, dann müßte dieser Pfad einen Endpunkt von e enthalten, der schon vor s_c bzw. t_r unbewacht ist, da kein Endpunkt von e in $R_{t_r} = R_{s_r}$ liegt. Der Reiniger kann also nicht erst in Schritt (1) von t_r aufgehoben worden sein. Daraus folgt, daß dieser Endpunkt vor und nach t_r verseucht ist, da e vor s_c bzw. t_r verseucht ist. Sei m_e derjenige solche Endpunkt, der näher an der sauberen Kante liegt. Dann liegt e nicht auf dem Pfad von m_e zu der sauberen Kante. Da m_e vor s_c verseucht war, sind vor s_r alle von m_e ausgehenden Kanten außer e verseucht, darunter die erste Kante auf dem Pfad von m_e zur sauberen Kante. Da dieser Pfad sowohl in s_r als auch in t_r unbewacht ist (alle Knoten außer m_e und n_e haben den gleichen Verseuchungsgrad), wird die saubere Kante in beiden Zügen rekontaminiert.

So ist $E_{cntm}(s_c s_r) = E_{cntm}(t_r) \setminus \{e\}$ sichergestellt. Kante e ist nach $s_c s_r$ sauber und nach t_r verseucht. Wir müssen zum Abschluß noch einen Reinigungszug t_c entwerfen, der die Kante e reinigt. Betrachten wir die möglichen Fälle für t_c. Wir überprüfen, ob genügend freie Reiniger zur Verfügung stehen.

– Kante e kann in t_c ohne freie Reiniger gereinigt werden. Siehe Abbildung 6 (a) auf Seite 23. In diesem Fall ist ein Endknoten

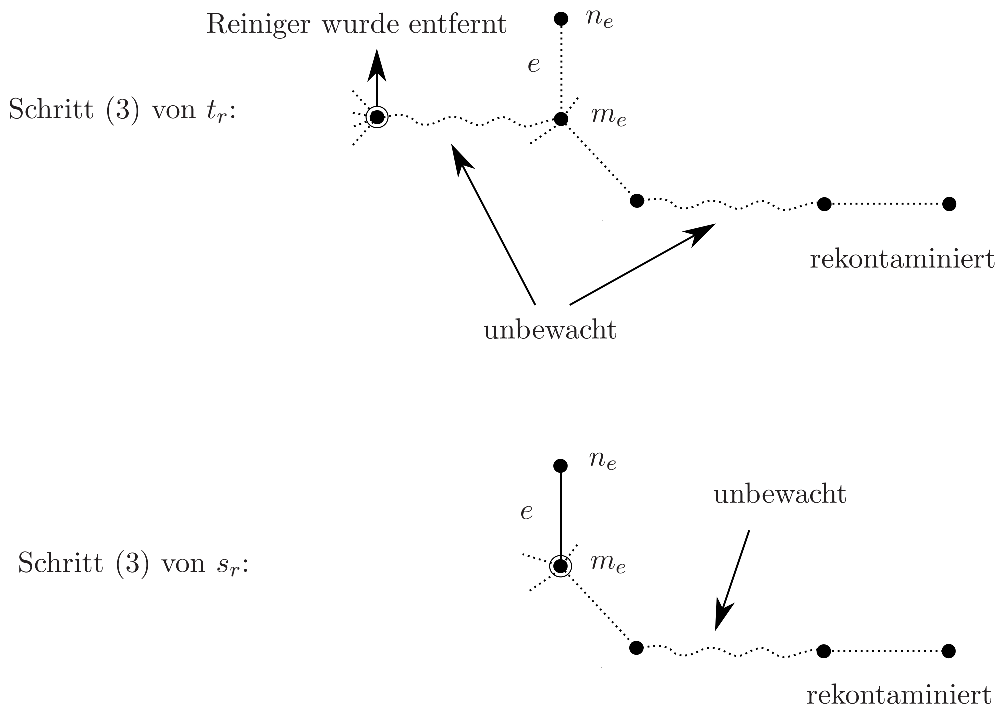

Abbildung 5: Aus Rekontamination in t_r folgt Rekontamination in s_r.

m_e vor t_c sauber bis auf e. In t_c wird der Reiniger auf m_e über e auf n_e geschoben.

- Kante e benötigt in t_c zwei freie Reiniger, um gereinigt zu werden. Siehe Abbildung 6 (b). In diesem Fall sind die Knoten m_e und n_e vor t_c beide verseucht, vom Grad ≥ 2 und unbewacht. Wir bilden t_c dann wie folgt: Zwei Reiniger werden auf m_e gesetzt und einer der beiden über e auf n_e geschoben. Wegen $E_{cntm}(s_c s_r) = E_{cntm}(t_r) \setminus \{e\}$ sind m_e und n_e nach $s_c s_r$ bis auf e verseucht, also teilweise sauber. Daher sind m_e und n_e nach $s_c s_r$ bewacht. Diese beiden Reiniger sind nach t_r frei und stehen für t_c zur Verfügung.
- Kante e benötigt in t_c einen freien Reiniger, um gereinigt zu werden. Hier gibt es zwei Fälle.
  * Der Zug s_c benötigt ebenfalls einen freien Reiniger, um e zu reinigen. Siehe Abbildung 6 (c). Da dieser Reiniger für s_c zur Verfügung steht, steht er wegen $|R_{t_r}| \geq |P_{t_r}|$ auch nach t_r für t_c zur Verfügung.
  * Der Zug s_c benötigt keinen freien Reiniger, um e zu reinigen. Siehe Abbildung 6 (d). In diesem Fall hat s_c einen Reiniger von einem bewachten und bis auf e sauberen Knoten m_e über e nach n_e geschoben. Der Knoten m_e ist jetzt sauber. Da aber

t_c für die Reinigung von e einen freien Reiniger benötigt, muß eine von m_e ausgehende Kante außer e in t_r (und damit auch in s_r) rekontaminiert worden sein. Daher muß m_e in P_{s_r} liegen, denn sonst würde auch e rekontaminiert werden. $|P_{t_r}|$ ist also echt kleiner als $|P_{s_r}|$. Wegen $|R_{t_r}| = |R_{s_r}| \geq |P_{s_r}| > |P_{t_r}|$ steht nach t_r mindestens ein freier Reiniger für t_c zur Verfügung.

Wir können für jede Situation nach t_r einen Reinigungszug t_c durchführen, der die Kante e reinigt. Daraus und aus $E_{cntm}(s_c s_r) = E_{cntm}(t_r) \setminus \{e\}$ folgt $E_{cntm}(s_c s_r) = E_{cntm}(t_r t_c)$. Damit garantiert uns Schritt (4) von t_r auch $N_{gr}(s_c s_r) = N_{gr}(t_r t_c)$.

□

3.4 Eliminierung des letzten Rekontaminierungszuges

Wir werden im folgenden zeigen, daß wir einen letzten Rekontaminierungszug, den wir weder mit Lemma 8 von Seite 10 aufteilen noch mit Lemma 9 von Seite 16 vorziehen können, weglassen können.

Lemma 10 *Sei s_r der letzte Rekontaminierungszug einer Reinigungsstrategie S, dem direkt ein Reinigungszug s_c vorausgeht und sei s_r nicht redundant. Wenn $|P_{s_r}| > |R_{s_r}|$ und für P_{s_r} und R_{s_r} keine unbewachte Trennmenge C mit $|C| < |R_{s_r}|$ existiert, dann gibt es eine Reinigungsstrategie Γ mit folgenden Eigenschaften:*

- *Γ verwendet die gleiche Anzahl Reiniger.*
- *Die Zugfolgen in S und Γ sind bis einschließlich s_c identisch.*
- *Γ kommt nach s_c ganz ohne Rekontaminierungszüge aus.*

Beweis. Wir beschreiben die Reinigungszüge, die in Γ auf s_c folgen. Jedem Reinigungszug in Γ wird genau ein Reinigungszug in S entsprechen, welcher dieselbe Kante reinigt. Dabei benötigt S nach s_r zusätzliche Reinigungszüge, um die in s_r rekontaminierten Kanten zu reinigen. Wir stellen zwei Bedingungen für den Spielstand auf, die nach jeweils einem Reinigungszug nach s_r in S und dem entsprechenden Zug in Γ (evt. ein leerer Zug) unverändert bleiben. Wir behaupten, daß für jedes Anfangsstück von S bis zu einem Zug nach s_r und dem korrespondierenden Anfangsstück von Γ folgende Bedingungen gelten:

(i) Die Menge der nach dem Anfangsstück von S sauberen Kanten ist eine Teilmenge der nach dem Anfangsstück von Γ sauberen Kanten.

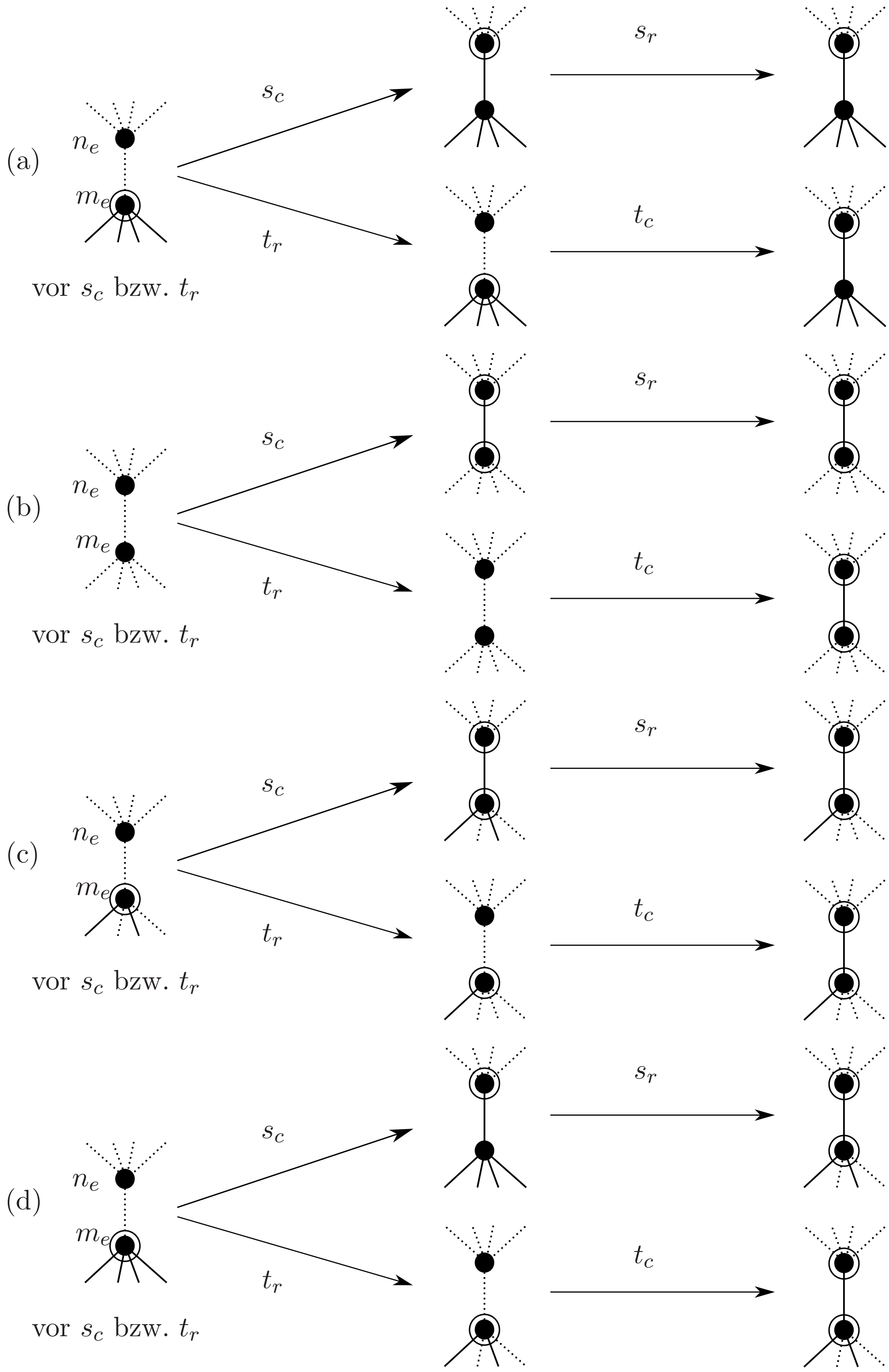

Abbildung 6: Beispiele für Züge $s_c s_r$ und entsprechende Züge $t_r t_c$

(ii) Wenn n ein Knoten ist, der nach dem Anfangsstück von S nicht bewacht, wohl aber nach dem Anfangsstück von Γ bewacht ist, dann liegt n in R_{s_r}.

Wir beweisen die Behauptung durch Induktion über die Zahl der Züge nach s_r in einem Anfangsstück von S. Die Beobachtung, daß unsere Bedingungen für das Anfangsstück von S bis einschließlich s_r und das Anfangsstück von Γ bis einschließlich eines leeren Zuges unmittelbar nach s_c offensichtlich gelten, ergibt den Induktionsanfang. Für den Induktionsschritt betrachten wir einen Reinigungszug m_S nach s_r in S. Seien die beiden Bedingungen also bis einschließlich des Zuges vor m_S und des entsprechenden Zuges in Γ erfüllt.

Sei m_S ein Zug, der eine in Γ schon saubere Kante reinigt. Dann entspricht m_S ein leerer Zug in Γ. Bedingung (i) bleibt offensichtlich erfüllt. Bedingung (ii) ist ebenfalls erfüllt, da m_S nur Reiniger von Knoten entfernen kann, die vor m_S bewacht und nach m_S unbewacht und sauber sind. Da (i) erfüllt ist, müssen diese Knoten auch in Γ sauber und daher unbewacht sein. Es entstehen also keine neuen Knoten, die einerseits in S unbewacht und andererseits in Γ bewacht sind und für die damit Bedingung (ii) relevant wäre.

S	...	s_c	s_r	...	m_S			...
Kante	...	$f \in E(...)$	-	...	$e \notin E(...s_c)$	oder	$e \in E(...s_c)$	...
Γ	...	s_c	-	...	-	oder	m_Γ	...
Kante	...	f	-	...	-	oder	e	...

Tabelle 1: Züge in S und die jeweils gereinigte Kante im Vergleich mit den entsprechenden Zügen in Γ. E_{cntm} ist abgekürzt als E.

Sei m_S nun ein Zug, der eine auch in Γ verseuchte Kante e reinigt. Dann müssen wir für Γ einen entsprechenden Zug m_Γ entwerfen, der die gleiche Kante e reinigt und die Bedingungen (i) und (ii) erhält. Bedingung (i) ist schon erfüllt, wenn m_Γ die gleiche Kante reinigt. Durch m_S und m_Γ können nur die Endpunkte von e ihren Bewachungszustand verändern. Ist ein vor m_S bewachter Knoten nach m_S unbewacht und sauber, wird er wegen Bedingung (i) auch nach m_Γ unbewacht und sauber sein. Ist ein vor m_Γ unbewachter Knoten nach m_Γ bewacht und teilweise sauber, wird er wegen Bedingung (i) auch nach m_S bewacht und teilweise sauber sein, da m_S die Kante e gereinigt hat. Wieder entsteht kein Knoten, der einerseits in S unbewacht und andererseits in Γ bewacht ist und für den Bedingung (ii) relevant wäre.

Es bleibt die Durchführbarkeit von m_Γ sicherzustellen. Wir zeigen jetzt, daß die Geltung von Bedingung (ii) vor m_S und m_Γ garantiert, daß vor m_S in S nicht mehr freie Reiniger vorhanden sind als vor m_Γ in Γ. Die Knoten in P_{s_r} sind unmittelbar vor s_r sauber und unmittelbar nach s_r teilweise sauber. Die Knoten in R_{s_r} sind unmittelbar vor s_r teilweise sauber und unmittelbar nach s_r verseucht. Es muß daher in Schritt (3) von s_r von jedem Knoten in P_{s_r} einen oder mehrere unbewachte Pfade zu Knoten in R_{s_r} geben, die also nicht über (bewachte) Knoten in $N_{gr} \setminus R_{s_r}$ führen. Für jeden Knoten in P_{s_r} ist mindestens einer dieser unbewachten Pfade *minimal* in dem Sinne, daß er außer dem Start- und dem Endknoten keine weiteren Knoten aus P_{s_r} oder R_{s_r} enthält und zyklenfrei ist. Betrachten wir irgendeinen dieser in diesem Sinne minimalen Pfade.

Unmittelbar vor s_r sind alle Knoten auf diesem unbewachten Pfad bis auf den bewachten Knoten in R_{s_r} sauber, sonst könnte der Knoten in P_{s_r} nicht sauber sein. Nach s_r sind alle Knoten auf diesem Pfad verseucht mit Ausnahme des Knoten in P_{s_r}, der teilweise sauber und bewacht ist. Wie sieht dieser Pfad unmittelbar vor m_S aus, wenn unsere Bedingungen (i) und (ii) noch sicher erfüllt sind?

- Entweder alle Knoten sind sauber und unbewacht. Dann ist der Pfad wegen Bedingung (i) vor m_Γ ebenfalls sauber und unbewacht. Siehe Abbildung 7(d) auf Seite 26.

- Oder der Pfad enthält mindestens einen bewachten Knoten.
  - Ist der Endknoten des Pfades in R_{s_r} bewacht? Dann ist dieser Knoten in Γ vor m_Γ bewacht oder unbewacht. Siehe Abbildung 7(b) und (c).
  - Ist ein anderer Knoten als der Endknoten des Pfades in R_{s_r} bewacht? Dann muß dieser Knoten in Γ unbewacht sein. Siehe Abbildung 7(a) und (c).

Entweder der Pfad enthält einen Knoten, der nicht in R_{s_r} liegt, vor m_S bewacht und gleichzeitig vor m_Γ unbewacht ist (Abbildung 7(a) und (c)) oder der Knoten in R_{s_r} ist vor m_S und m_Γ jeweils im gleichen Bewachungszustand (Abbildung 7(b) und (d)).

Da wir irgendeinen der oben beschriebenen Pfade betrachtet haben, können wir verallgemeinern. Die Menge aller Knoten in R_{s_r}, die sich vor m_S und m_Γ jeweils im gleichen Zustand befinden, vereinigt mit der Menge aller Knoten, die vor m_S bewacht und vor m_Γ unbewacht sind, bilden eine unbewachte Trennmenge C für R_{s_r} und P_{s_r}. Im zu beweisenden Lemma nahmen wir an, daß keine Trennmenge mit $|C| < |R_{s_r}|$ existiert. Es gilt also $|C| \geq |R_{s_r}|$:

$$
\begin{aligned}
|C| &= |\text{Knoten in } R_{s_r}\text{, die sich vor } m_S \text{ und } m_\Gamma \text{ im gleichen Zustand befinden}| \\
&\quad + |\text{Knoten, die vor } m_S \text{ bewacht sind, aber nicht vor } m_\Gamma| \geq |R_{s_r}|
\end{aligned}
$$

Wir ziehen |Knoten in R_{s_r}, die sich vor m_S und m_Γ im gleichen Zustand befinden| ab und erhalten:

$$
\begin{aligned}
&|\text{Knoten, die vor } m_S \text{ bewacht sind, aber nicht vor } m_\Gamma| \\
&\geq |\text{Knoten in } R_{s_r}\text{, die sich vor } m_S \text{ und } m_\Gamma \textit{ nicht} \text{ im gleichen Zustand befinden}|
\end{aligned}
$$

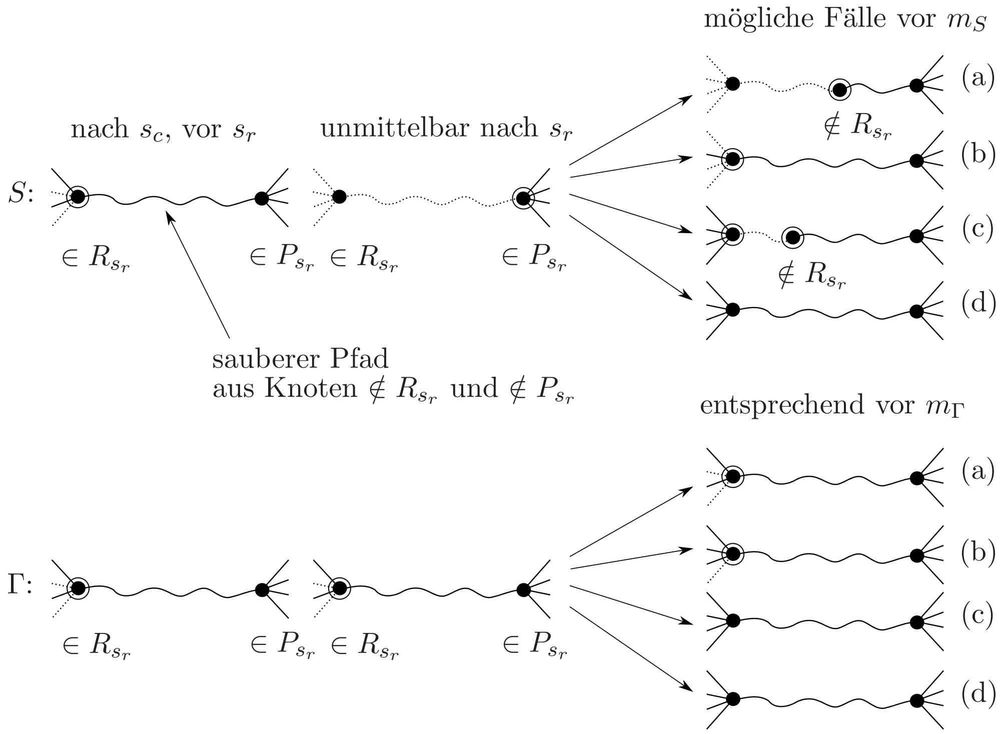

Abbildung 7: Zustände eines minimalen Pfades von R nach P.

Nach Bedingung (ii) liegen alle Knoten, die vor m_S nicht bewacht sind, wohl aber vor m_Γ, in R_{s_r}. Den rechten Teil der Ungleichung können wir differenzieren:

$$
\begin{aligned}
&|\text{Knoten, die vor } m_S \text{ bewacht sind, aber nicht vor } m_\Gamma| \\
&\geq |\text{Knoten, die vor } m_\Gamma \text{ bewacht sind, aber nicht vor } m_S| \\
&+|\text{Knoten in } R_{s_r}\text{, die vor } m_S \text{ bewacht sind, aber nicht vor } m_\Gamma|
\end{aligned}
$$

Addition von |Knoten, die vor m_S und vor m_Γ bewacht sind| ergibt:

$$
\begin{aligned}
&|\text{Knoten, die vor } m_S \text{ bewacht sind}| \\
&\geq |\text{Knoten, die vor } m_\Gamma \text{ bewacht sind}| \\
&+|\text{Knoten in } R_{s_r}\text{, die vor } m_S \text{ bewacht sind, aber nicht vor } m_\Gamma|
\end{aligned}
$$

und damit durch Invertieren

$$
\begin{aligned}
&|\text{freie Reiniger vor } m_S| \\
&\leq |\text{freie Reiniger vor } m_\Gamma| \\
&-|\text{Knoten in } R_{s_r}\text{, die vor } m_S \text{ bewacht sind, aber nicht vor } m_\Gamma|
\end{aligned}
$$

und Abschätzen

$$|\text{freie Reiniger vor } m_S| \leq |\text{freie Reiniger vor } m_\Gamma|$$

Wir wissen jetzt, daß für m_Γ mindestens so viele freie Reiniger zur Verfügung stehen wie für m_S. Der Zug m_Γ muß die Kante e reinigen, die auch in m_S gereinigt wird. Folgende Reinigungszüge sind denkbar:

- Ein Endpunkt von e ist sauber bis auf e und bewacht. Wir schieben den Reiniger von diesem Endpunkt über e zum anderen Endpunkt. Es wird kein freier Reiniger verbraucht.

- Beide Endpunkte haben Grad ≥ 2 und sind verseucht und damit unbewacht. Wir brauchen zwei freie Reiniger. Beide werden auf denselben Endpunkt von e gesetzt und einer von beiden über e zum anderen Endpunkt geschoben.

- Ein Endpunkt von e ist teilweise sauber und bewacht mit mindestens zwei verseuchten ausgehenden Kanten inklusive e. Wir brauchen einen freien Reiniger. Dieser wird auf den bewachten Endpunkt gesetzt und über e geschoben.

- Ein Endpunkt von e ist verseucht und eine Sackgasse. Wir brauchen einen freien Reiniger. Dieser wird auf den besagten Endpunkt gesetzt und über e geschoben.

Kann es Fälle geben, in denen m_Γ mehr freie Reiniger benötigt als m_S?

- Wenn m_S keinen freien Reiniger benötigt, könnte m_Γ einen oder zwei benötigen. Allerdings ist ein Endpunkt von e sauber bis auf e und bewacht, wenn m_S keinen freien Reiniger benötigt. Dann ist wegen der Bedingung (i) dieser Endpunkt vor m_Γ ebenfalls sauber bis auf e und bewacht. Also braucht m_Γ ebenfalls keinen freien Reiniger, um e zu reinigen.

- Wenn m_Γ zwei freie Reiniger benötigt, könnte m_S einen oder keinen benötigen. Allerdings sind beide Endpunkte von e verseucht und damit unbewacht, wenn m_Γ zwei freie Reiniger benötigt. Dann sind wegen Bedingung (i) die beiden Endpunkte von e vor m_S ebenfalls verseucht und damit unbewacht. Also braucht auch m_S zwei freie Reiniger, um e zu reinigen.

Es stehen also immer genügend freie Reiniger für die Durchführung von m_Γ zur Verfügung. Für jeden Reinigungszug m_S nach s_r in S, der eine Kante $e \in E_{cntm}(s_c)$ reinigt, können wir einen Reinigungszug m_Γ in Γ durchführen, welcher die gleiche Kante e reinigt. □

4 Ergebnis

Wir haben jetzt alle Werkzeuge beisammen, um nach und nach alle Rekontaminierungszüge aus einer Reinigungsstrategie S zu eliminieren. Mit Lemma 6 von Seite 7 können wir Folgen von Rekontaminierungszügen, die nicht von einem Reinigungszug unterbrochen werden, kombinieren. Wir definieren Paare

$$P(S) = \Big(CM(S), ER(S)\Big).$$

$CM(S)$ ist die Anzahl der Reinigungszüge vor dem letzten (kombinierten) Rekontaminierungszug. $ER(S)$ ist die Anzahl der im letzten Rekontaminierungszug rekontaminierten Kanten. Wir ordnen die Werte von $P(S)$ lexikographisch, also

$$\begin{aligned} P(S_1) < P(S_2) &\Leftrightarrow CM(S_1) < CM(S_2) \\ &\text{oder } \Big(CM(S_1) = CM(S_2) \text{ und } ER(S_1) < ER(S_2)\Big) \end{aligned}$$

Lemma 11 *Sei S_1 eine Reinigungsstrategie, die mit k Reinigern auskommt und in deren Verlauf mindestens eine Kante rekontaminiert wird. Dann gibt es eine Reinigungsstrategie S_2, die mit k Reinigern auskommt und für die $P(S_2) < P(S_1)$ ist.*

Beweis. Betrachten wir den letzten (kombinierten) Rekontaminierungszug r, dem also ein Reinigungszug unmittelbar vorausgeht. Sei r nicht redundant und seien R und P die wie vorher zugehörigen Knotenmengen.

- Sei $|R| \geq |P|$. Dann ersetze r nach Lemma 9 von Seite 16 und den vorhergehenden Reinigungszug durch einen neuen Rekontaminierungszug und einen neuen anschließenden Reinigungszug. $CM(S)$ wird um mindestens eins reduziert; möglicherweise um mehr als eins, wenn der neue Rekontaminierungszug leer ist.

- Sei $|R| < |P|$. Hier gibt es zwei Unterfälle:

  – Es gibt eine minimale, unbewachte Trennmenge C mit $|C| < |R| < |P|$. Dann teile r nach Lemma 8 von Seite 10 in zwei Rekontaminierungszüge mit $R_1 = R \setminus C$, $P_1 = C \setminus R$, $R_1 = C \setminus P$ und $P_2 = P \setminus C$. Wegen

  $$|R_1| = |R \setminus C| = |R| - |R \cap C| > |C| - |R \cap C| = |C \setminus R| = |P_1|$$

  gibt es am Ende des ersten neuen Zuges mehr freie Reiniger als vorher. Diesen Zug und den vorhergehenden Reinigungszug können wir wiederum nach Lemma 9 durch einen neuen Rekontaminierungszug mit anschließendem neuen Reinigungszug ersetzen.

    * Ist der neue Reinigungszug leer, dann können die aktuell zwei letzten Rekontaminierungszüge kombiniert werden und es ist ein Reinigungszug eingespart worden.

* Ist der neue Reinigungszug nichtleer, dann wird im aktuell letzten Rekontaminierungszug durch unsere Aufteilung nach Lemma 8 mindestens eine Kante weniger rekontaminiert als in r. Es gilt $|E_{cntm}| < |E_{cntm}(r_1)| < |E_{cntm}(r_1 r_2)| = |E_{cntm}(r)$, da $R_1 \neq \emptyset$ und $R_2 \neq \emptyset$.

  In beiden Fällen ist $P(S_2)$ lexikographisch kleiner als $P(S_1)$.

– Es gibt keine minimale, unbewachte Trennmenge C mit $|C| < |R|$. Dann kann r nach Lemma 10 von Seite 22 ausgelassen werden. $CM(S_1)$ reduziert sich um mindestens eins, da jetzt ein anderer Zug der letzte Rekontaminierungszug ist und zwischen diesem und r mindestens ein Reinigungszug lag.

□

Wir können nun Theorem 3 von Seite 6 beweisen. Unter allen Reinigungsstrategien, die mit k Reinigern auskommen, wähle diejenige, für die $P(S)$ lexikographisch am kleinsten ist. Nach Lemma 11 von Seite 28 gilt für diese Strategie $P(S) = (0, 0)$, das heißt keine Kante wird rekontaminiert.

Zum Schluß übertragen wir unser Ergebnis auf das Spiel nach den alten Regeln.

Theorem 12 *Gibt es für einen Graphen eine Reinigungsstrategie nach den alten Regeln, die mit k Reinigern auskommt, dann gibt es für diesen Graphen auch eine Reinigungsstrategie nach den alten Regeln, die mit k Reinigern und ohne Rekontaminationen auskommt.*

Beweis. Aus Lemma 1 von Seite 3 wissen wir, daß es für jede Reinigungsstrategie nach den alten Regeln, die mit k Reinigern auskommt, eine Reinigungsstrategie nach den neuen Regeln gibt, die mit k Reinigern auskommt. Nach Theorem 3 von Seite 6 gibt es für diese Strategie nach den neuen Regeln eine Strategie nach den neuen Regeln, die ebenfalls mit k Reinigern, aber ohne Rekontaminationen auskommt. Diese Strategie besteht aus einer Folge von Reinigungszügen nach den neuen Regeln. Zum Schluß wissen wir aus Lemma 2 von Seite 5, daß Reinigungszüge nach den neuen Regeln vollständig aus legalen Zügen nach den alten Regeln bestehen, die nicht zu Rekontaminationen führen. □

Literatur

[1] A. S. LaPaugh. Recontamination does not help to search a graph. *J. ACM*, 40(2):224–245, 1993.

[2] N. Megiddo, S. L. Hakimi, M. R. Garey, D. S. Johnson, and C. H. Papadimitriou. The complexity of searching a graph. *J. ACM*, 35(1):18–44, 1988.