

RHEINISCHE FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT BONN
INSTITUT FÜR INFORMATIK I



Jens Behley

**Platzieren von
Funkbaken zur
Positionsbestimmung**

12. Juni 2007

Seminararbeit im SoSe 2007

Zusammenfassung

Sei ein Polygon P gegeben. Wie viele und wo im Polygon P müssen wir nun Funkbaken, welche in einem Winkelbereich Signale aussenden, platzieren, so dass ein mobiler Empfänger anhand der Signale der Funkbaken entscheiden kann, ob er sich innerhalb des Polygons befindet? Hierzu werden wir untere und obere Schranken zeigen, aber auch sehen, dass spezielle Polygone mit weniger Funkbaken bewacht werden können.

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Einführung | 2 |
| 2 | Beliebige Polygone | 4 |
| 2.1 | Obere Schranke | 5 |
| 2.2 | Untere Schranke | 12 |
| 3 | Spezielle Polygone | 13 |
| 3.1 | Konvexe Polygone | 13 |
| 3.2 | Pseudodreiecke | 15 |
| 3.3 | Orthogonale Polygone | 16 |
| 3.4 | Polygone mit sublinearer Wächteranzahl | 17 |
| 4 | Schlusswort | 19 |

1 Einführung

Mobile Endgeräte, wie PDA, Notebook oder Mobiltelefone, können anhand von Positionsinformationen dem Benutzer bestimmte Dienste oder Informationen anbieten und werden so zu kontextsensitiven Endgeräten.

Szenarien, wie das Öffnen des letzten Besprechungsprotokolls beim Betreten des Konferenzraums, das Anzeigen der in der Nähe befindlichen Hotels auf dem Handydisplay beim Verlassen des Flughafens oder kontextsensitive Werbung auf dem PDA-Display im Einkaufswagen sind denkbar und wohl in Zukunft alltäglich [6].

In den meisten Fällen ist die Verwendung von GPS - vor allem in Gebäuden - zu ungenau oder zu unzuverlässig, so dass alternative Verfahren benötigt werden.

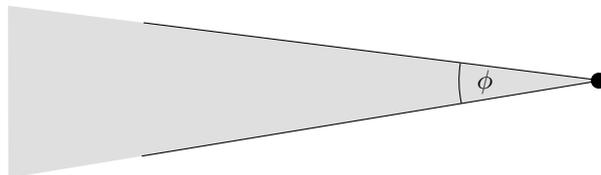


Abbildung 1: Funkbake als Punkt in der Ebene mit Winkel ϕ und Randstrahlen.

Im Folgenden werden wir uns mit der Positionsbestimmung mittels festinstallierter Funkbaken beschäftigen - basierend auf der Arbeit von David Eppstein, Michael T. Goodrich und Nodari Sitchinava[3].

Bei unserer Betrachtung wollen wir Funkbaken als Punkte in der Ebene, die in einem von Randstrahlen abgegrenzten Winkelbereich Signale senden; vereinfachen(siehe Abbildung 1). Ein mobiler Empfänger kann nun anhand des Signals einer Funkbake entscheiden, ob er sich in dem von der Funkbake bewachten Bereich befindet oder nicht - man kann es sich etwa derart vorstellen, dass die Funkbaken eindeutige Schlüssel senden, welche vom mobilen Empfänger nur im Sendewinkelbereich der Funkbake empfangen werden können. Wenn man nun dies als logisches Prädikat $B_g(p)$, für die Funkbake g und den mobilen Empfänger p , interpretiert, welches wahr wird, wenn das Signal der Funkbake g von p empfangen werden kann, kann man eine Formel für eine Menge von Funkbaken vorgeben, womit sich dann ein Bereich in der Ebene abgrenzen lässt, da jede Funkbake einen Ausschnitt der Ebene durch ihr ausgesendetes Signal überdeckt.

Die Fragestellung, die uns hierbei genauer beschäftigen wird, ist wie viele solcher Funkbaken benötigen wir (mindestens oder maximal), um ein durch ein beliebiges Polygon P abgegrenztes Gebiet zu überdecken, damit einen beliebiger Empfänger p entscheiden kann, ob er sich in diesem Bereich befindet oder nicht. Hierzu ist eine Formel für P aus logischen Funkbaken-

prädikaten $B_g(p)$ gesucht, die monoton¹ und prägnant ist. In der Arbeit von David Eppstein, Michael T. Goodrich und Nodari Sitchinava[3] wird dieses Problem als "Skulpturengarten" Problem (sculpture garden problem) bezeichnet. (siehe Abbildung 2)

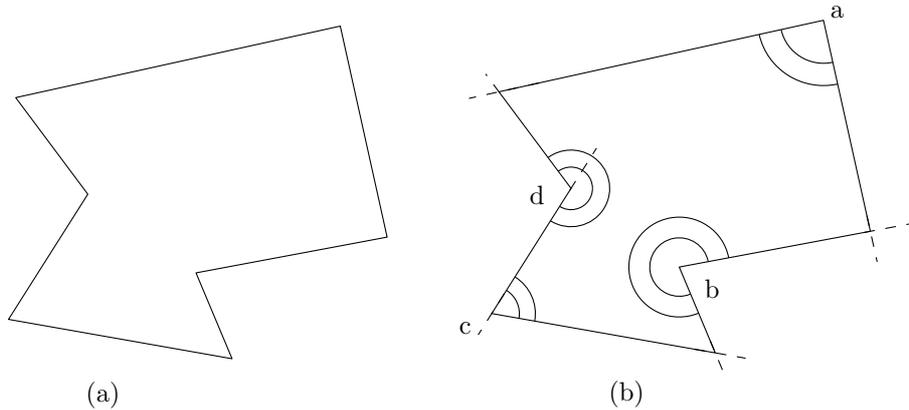


Abbildung 2: (a) Ein Polygon P und (b) dessen Abdeckung mittels Funkbaken, welche in den Ecken mit den konzentrischen Kreisbögen platziert sind. Die zugehörige Formel ist hier die Konjunktion der Funkbaken: $a \wedge b \wedge c \wedge d$.

Eine Formel soll hier als prägnant bezeichnet werden, wenn $O(1)$ Funkbaken genügen, damit ein mobiler Empfänger entscheiden kann, ob er sich in dem von den Funkbaken bewachten Bereich befindet oder nicht.

Das skizzierte Szenario erinnert ein wenig an das so genannte Kunstgalerie (art gallery) Problem bei dem wir eine Anzahl von Wächtern in einer polygonalen Szene derart positionieren sollen, dass sie jeden Punkt in dieser Szene sehen können. Geometrisch formuliert ist der Grundriss einer Kunstgalerie als - nicht notwendigerweise einfaches - Polygon P gegeben und Wächter g als Punkte in der Ebene sind so in P zu setzen, dass alle Punkte aus P mittels eines Liniensegmentes zu mindestens einem Wächter g verbunden werden können, ohne dass der Rand von P geschnitten wird. Bei diesem Problem können die Wächter einen Winkelbereich von 2π überwachen und es konnte gezeigt werden, dass $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ Wächter genügen und manchmal sogar nötig sind, um eine polygonale Szene komplett zu bewachen. (Untere Schranke ist trivialerweise 1, da ein Wächter genügt, um jedes konvexe einfache Polygon zu bewachen.)[1, 5]

Leider lässt sich dieses Ergebnis nicht auf das oben skizzierte Szenario übertragen, da die Wächter nicht entscheiden können, ob sich ein Punkt innerhalb eines abgegrenzten Bereichs befindet oder nicht. Sie können nur Aussage darüber treffen, dass sie einen Punkt sehen. Jedoch aufgrund der Ver-

¹Eine logische Formel f ist monoton, wenn sie nur aus Konjunktionen und Disjunktionen besteht.

wandschaft werden wir im Folgenden die Funkbaken ebenfalls als Wächter bzw. Winkelwächter bezeichnen.

Eine einfache und triviale Strategie zur Platzierung der Winkelwächter im zu bewachenden Polygon wäre, das Polygon zu triangulieren und dann jedes Dreieck mit 2 Wächtern zu bewachen, wobei diese dann in den Ecken der Dreiecke platziert werden würden und als Winkel ϕ den Innenwinkel dieser Dreiecksecke erhalten. (siehe Abbildung 3)

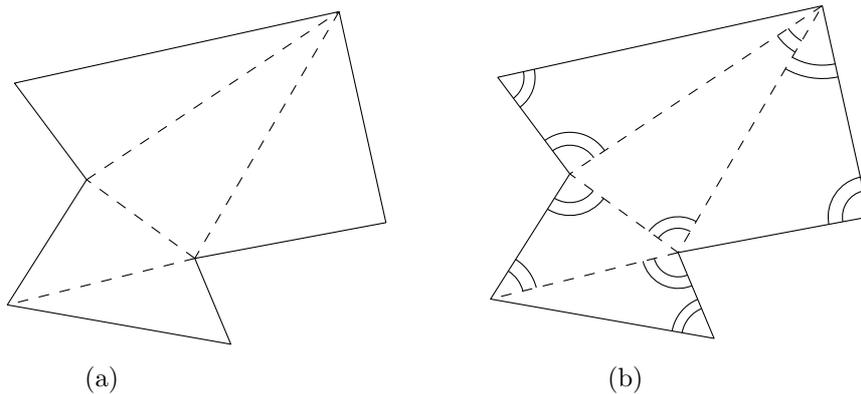


Abbildung 3: (a) Ein trianguliertes Polygon P und (b) die Abdeckung jedes Dreiecks mit 2 Winkelwächtern.

Die Formel wäre dann die Disjunktion der Konjunktionen der Prädikate pro Dreieck und somit sowohl monoton als auch prägnant, da pro Konjunktion nur 2 Prädikate benötigt werden, um deren Wahrheitswert zu bestimmen. Jedoch ist dieses Ergebnis, wie wir später sehen werden, nicht sehr befriedigend, da für ein Polygon bestehend aus n Punkten mit h Löchern $n+2(h-1)$ Dreiecke bei der Triangulation entstehen und somit insgesamt mindestens $2(n+2(h-1)) = 2n+4(h-1)$ Winkelwächter benötigt werden. Für einfache Polygone hätten wir also $2n-4$ Winkelwächter aufgewendet.

2 Beliebige Polygone

Als erstes untersuchen wir beliebige Polygone und werden zeigen, dass maximal $n+2(h-1)$ Wächter benötigt werden, was um den Faktor 2 besser ist als die Triangulierungsstrategie aus der Einführung.

Jedoch mag sich die Frage stellen, ob die Positionierung von Wächtern in den Ecken eines Polygons und deren Innenwinkeln als Winkel ϕ ausreicht, um beliebige Polygone mit einer prägnanten und monotonen Formel zu definieren. Diese Art Winkelwächter bezeichnen wir im folgenden als natürliche Winkelwächter, zur Unterscheidung von Winkelwächtern, die an beliebiger Position in der Ebene positioniert werden.

Leider reicht es nicht nur natürliche Winkelwächter zu verwenden, wie folgendes Theorem zeigt.

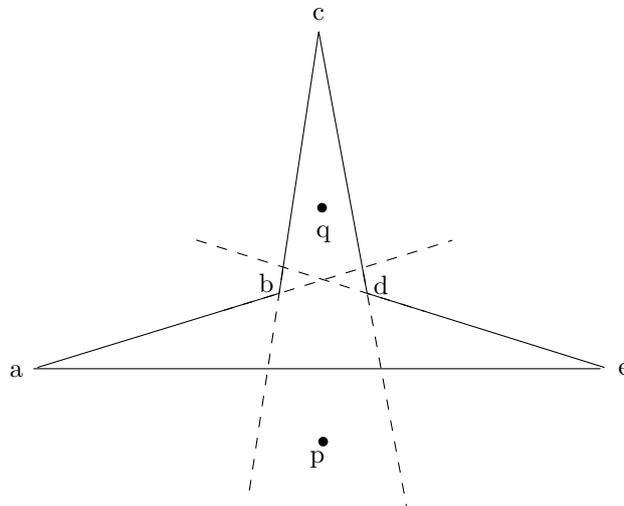


Abbildung 4: Hier kann mittels natürlicher Winkelwächter zwischen p und q nicht unterschieden werden.

Theorem 1 *Es gibt ein Fünfeck P , welches nicht nur mittels natürlicher Winkelwächter bewacht werden kann.*

Beweis. Sei P das oben gezeigte Fünfeck, p der Punkt innerhalb und q der Punkt außerhalb von P . Dann können die natürlichen Winkelwächter nicht zwischen p und q unterscheiden, da für c, b, d beide Punkte innerhalb des Polygons liegen und für a und e beide Punkte außerhalb des überwachten Bereichs liegen. So folgt, dass jede Formel aufgebaut aus Prädikaten B_x mit $x = a, b, c, d$ für p und q die selben Ergebnisse liefert und somit sind zusätzliche Wächter notwendig, um eindeutig zu entscheiden, ob sich ein Punkt innerhalb von P befindet. \square

Dieses Ergebnis mag enttäuschen, aber zeigt, dass zusätzlich Steiner-Punkte oder Steiner-Winkel notwendig sind, um beliebige Polygone mittels Winkelwächter zu bewachen.

Wenn man jedoch nur orthogonale Polygone zulässt, reicht es vollkommen, natürliche Winkelwächter zu verwenden.

2.1 Obere Schranke

Nachdem wir nun einführend betrachtet haben, dass es unter Umständen nicht reicht Wächter nur in den Ecken eines Polygons zu platzieren, zeigen wir, dass maximal $n + 2(h - 1)$ Winkelwächter benötigt werden.

Hierzu benötigen wir aber ein paar Grundlagen, welche wir dann verwenden können.

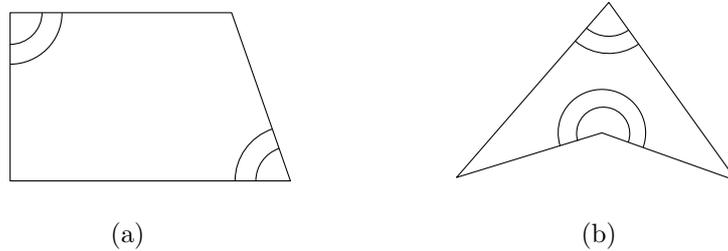


Abbildung 5: Die 2 Fälle für Vierecke und deren Lösung.

Lemma 2 *Jedes Viereck P lässt sich mit 2 Wächtern bewachen.*

Beweis. Wenn das Viereck P konvex ist platzieren wir in 2 gegenüberliegenden Ecken von P einen natürlichen Winkelwächter mit deren Innenwinkel und die zugehörige Formel ergibt sich als Konjunktion dieser beiden Prädikate (siehe Abbildung 5 (a)). Wenn nun P nicht konvex ist, gibt es eine reflexe Ecke (Innenwinkel $> \pi$) in der wir einen Winkelwächter platzieren. Den anderen Wächter platzieren wir in der zur reflexen Ecke gegenüberliegenden Ecke (siehe Abbildung 5 (b)). Die Formel ist auch hier die Konjunktion der Funkbakenprädikate. \square

Lemma 3 *Jedes Fünfeck P kann mit 3 Wächtern bewacht werden.*

Beweis. Hierfür wollen wir das zuvor erarbeitete Ergebnis nutzen und beschreiben eine Methode, um ein Viereck T zu konstruieren, welches das Fünfeck P vollständig enthält und mindestens 3 konsekutive Kanten mit P gemeinsam hat. Hierzu sei H die konvexe Hülle von P .

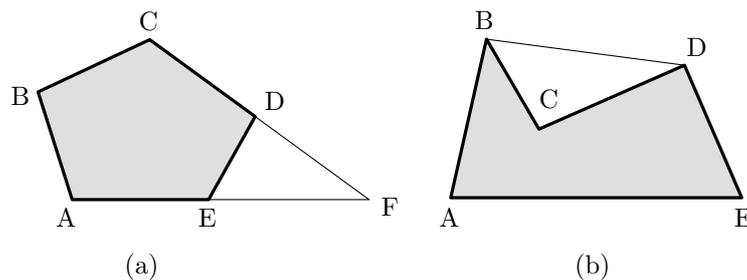
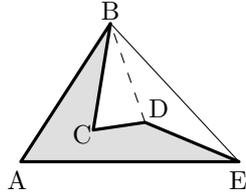


Abbildung 6: (a) H besteht aus fünf Punkten (b) H besteht aus 4 Punkten.

Fall 1: H besteht aus fünf Punkten, d.h. P ist konvex. Wähle 4 beliebige Kanten von H und T ist das Viereck, dass man erhält, wenn man die Geraden durch die 4 Kanten schneidet (siehe Abbildung 6 (a)).

Fall 2: Wenn H aus 4 Punkten besteht, dann ist $T = H$ (siehe Abbildung 6 (b)).

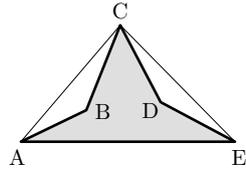
Fall 3: Besteht H aus 3 Punkten, dann gibt es 2 Unterfälle, die zu betrachten sind:



Fall 3a: 2 Kanten von P sind auch Kanten von H .

Da P ein Fünfeck ist, müssen die beiden Kanten adjazent sein. Sei $ABCDE$ das Polygon, welches die Ecken A, B und E mit H gemeinsam hat. Sei nun die Kante $BE \in H$ nicht Kante in P , dann kann einer der beiden Ecken $C \notin H$ oder $D \notin H$ mit B und E verbunden werden, ohne dass P geschnitten wird.

Sei nun D oBdA diese Ecke. Da nun D oder C mit entweder B oder E eine Kante in P bildet, ist DE oder DB Kante im Fünfeck P , so dass das gewünschte Viereck T entweder die konsekutiven Kanten AB, AE, DE von P enthält und zusätzlich DB oder AB, AE, DB von P enthält und zusätzlich DE . Somit hätten wir unser gewünschtes Viereck T , welches P vollständig enthält und 3 konsekutive Kanten von P enthält gebildet.



Fall 3b: 1 Kante von P ist gemeinsam mit H .

Im letzten Fall sei wieder $ABCDE$ unser Fünfeck P mit A, C und E als Ecken in der konvexen Hülle H . Man kann nun B oder D wählen, welche keine Ecken in H sind und nicht adjazent sein können, da die konvexe Hülle H nur eine Kanten mit P teilt, um T aus A, C, E und der gewählten Ecke zu bilden.

Da beide Nachbarn von dem gewählten Punkt B oder D in P Ecken der konvexen Hülle sind, können Strahlen die von diesem Punkt durch die Nachbarn gehen P niemals schneiden und somit enthält das Viereck P vollständig und besitzt aufgrund der Annahme, dass H eine Kante enthält und 3 Punkte von P als Ecken in H vorkommen, mit der gewählten Ecke (B oder D) 3 konsekutive Kanten, die auch in P vorkommen.

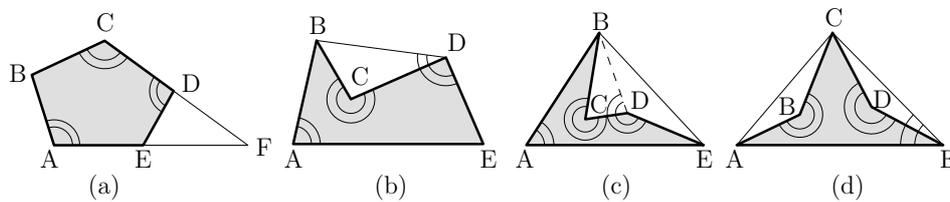


Abbildung 7: Alle Fälle für Fünfecke mit deren Platzierungen.

Nachdem wir nun eine Methode haben, um ein Viereck T zu erzeugen, welches P enthält und 3 konsekutive Kanten mit P teilt, können wir Lemma 2 auf das Viereck anwenden und benötigen für T 2 Wächter. Da nun

eine Ecke v von P innerhalb von T liegt, sind höchstens 2 Kanten nicht von einem Wächter abgedeckt, so dass wir an v ein Wächter platzieren müssen und somit 3 Winkelwächter benötigen, um P vollständig zu überdecken. Die zugehörige Formel bildet wieder die Konjunktion der Prädikate (siehe Abbildung 7). \square

Lemma 4 *Jedes Sechseck kann mit höchstens 4 Wächtern bewacht werden.*

Beweis. Hier müssen wir 2 Fälle betrachten: Sechseck deren dualer Graph der Triangulation² nicht sternförmig³ und deren dualer Graph der Triangulation sternförmig ist.

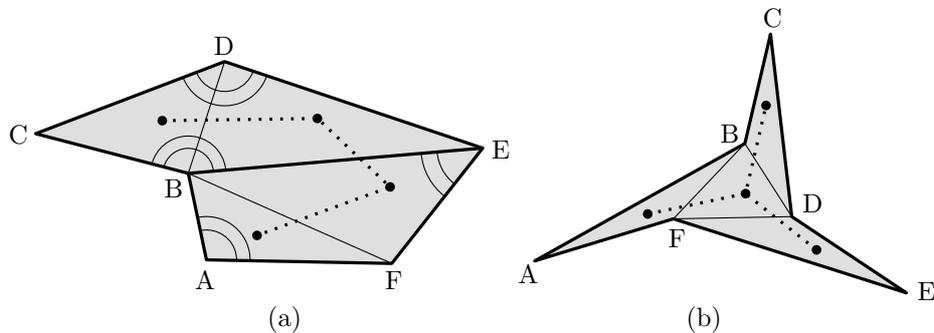


Abbildung 8: (a) Hier kann aus jeweils 2 Dreiecken ein Viereck gebildet werden. (b) Der duale Graph der Triangulation ist sternförmig und daher ist es nicht möglich 2 Dreiecke zusammenzufassen.

Im ersten Fall, wenn der duale Graph der Triangulation nicht sternförmig ist, kann die Triangulation genutzt werden, um 2 Vierecke zu bilden, welche dann nach Lemma 2 jeweils mit 2 Wächtern bewacht werden können (siehe Abbildung 8 (a)).

Damit bleibt nur noch der Fall in dem der duale Graph der Triangulation sternförmig ist und die Triangulation nicht derart modifiziert werden kann, dass der duale Graph der Triangulation nicht mehr sternförmig ist.

Im zweiten Fall gibt es ein Dreieck dessen dualer Knoten Grad $n - 1$ besitzt (siehe Abbildung 8 (b)). Im folgenden sei dieses Dreieck BDF . Nun bilden die Verlängerungen der Kanten des Dreiecks BDF 6 Regionen (siehe Abbildung 9(a)). Da nun alle adjazenten Dreiecke der Triangulation nicht konvex sein können, da sonst in dem konvexen Dreieck die Diagonale durch die andere Diagonale ersetzt werden könnte, was dazuführen würde, dass 2 Vierecke gebildet werden könnten und den dualen Graph der Triangulation

²Wir betrachten hier nur den dualen Graph ohne den Knoten in der äußeren Region.

³Ein Graph bestehend aus n Knoten ist sternförmig, wenn ein Knoten Grad $n - 1$ besitzt und alle anderen Knoten Grad 1 haben.

dann nicht mehr sternförmig machen würde, müssen die Ecken A , C und E in den Eckregionen liegen. Des weiteren können höchstens 2 Ecken von A , C und E in einer Eckregion liegen, womit 2 Unterfälle zu untersuchen sind:

1. Jede Ecke A , C und E liegt in einer Region. In diesem Fall sind die Ecken B , D und F reflex, was bedeutet, dass man Strahlen bilden kann, die in B, D und F beginnen, entlang der Kanten des Sechsecks verlaufen und sich gegenseitig nur in A , C und E schneiden. Damit folgt, dass 3 natürliche Winkelwächter an den Ecken B , D und F genügen, um das Sechseck zu bewachen. Die Konjunktion der Prädikate bildet ferner die Formel.

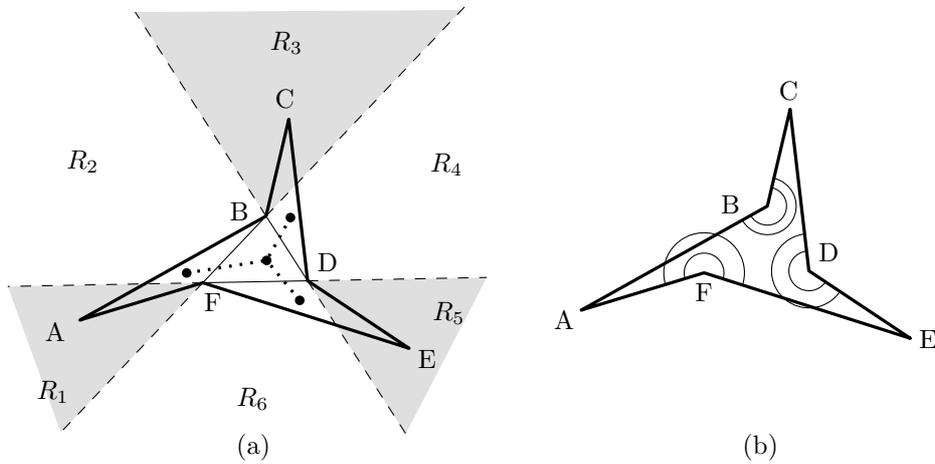


Abbildung 9: (a) Jede Ecke A, C, E liegt in einer Region. (b) Platzierung der Winkelwächter.

2. Zwei der Ecken A, C und E liegen in einer Region. Sei nun oBdA A und C in der Region der Ecke B (in der Abbildung R_3) und E in der Region der Ecke D (in der Abbildung R_5). Strahlen, die nun in A und C beginnen und entlang der Kanten des Polygons verlaufen, schneiden echt⁴ alle das Segment DF und somit die Kante EF , aber nicht die Kante DE . Somit ist ein Teil des Polygons definiert durch die Disjunktion der Konjunktion des natürlichen Winkelwächter in A und dem Kantenwächter⁵ auf der Kante EF und dem natürlichen Winkelwächter in C und Kantenwächter EF $((B_A(p) \wedge B_{EF}(p)) \vee (B_C(p) \wedge B_{EF}(p)))$. Nun ist nur noch ein kleiner Bereich in der Region zur Ecke D (in der Abbildung R_5) nicht durch die Winkelwächter bewacht, so dass ein Teil des Dreiecks DEF fehlt.

⁴Ein Segment wird echt geschnitten, wenn der Schnittpunkt nicht Endpunkt des Segments ist.

⁵Ein Kantenwächter sei ein Winkelwächter auf einer Kante mit Winkel $\phi = \pi$

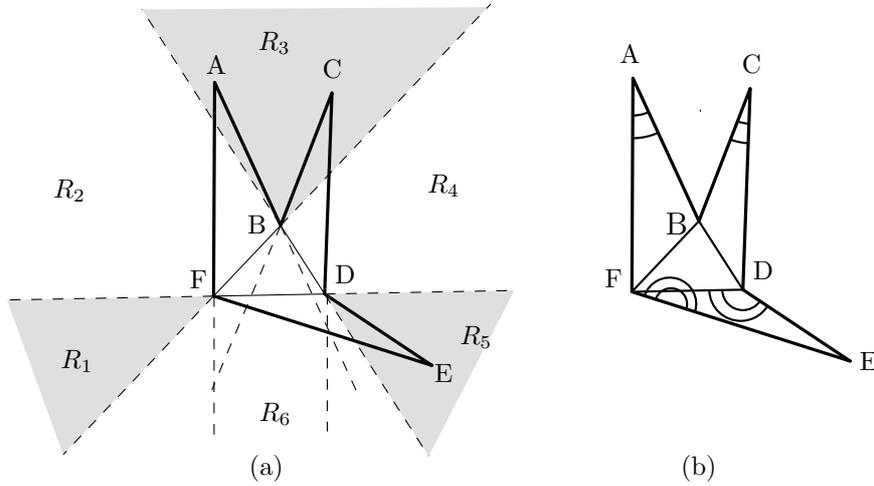


Abbildung 10: (a) Zwei Ecken liegt in einer Region. (b) Platzierung der Winkelwächter mit zugehöriger Formel $(B_A(p) \vee B_C(p) \vee B_{FDE}(p)) \wedge B_{EF}(p)$, wobei EF den Kantenwächter auf der Kante EF und FDE den Winkelwächter in der Ecke FDE bezeichnet.

Zur Vervollständigung der Lösung muss das komplette Dreieck DEF überdeckt werden, so dass es genügt, aufgrund dessen, dass ein Kantenwächter auf Kante DE platziert wurde, einen Winkelwächter in der Ecke D des Dreiecks DEF zu platzieren mit dem Winkel der Ecke FDE des Dreiecks DEF (siehe Abbildung 10). Die komplette gewünschte Formel ergibt sich aus der Disjunktion der obigen Disjunktion der Konjunktionen und der Konjunktion des Winkelwächter in FDE und dem Kantenwächter EF . $((B_A(p) \vee B_C(p)) \wedge B_{EF}(p) \vee (B_{FDE}(p) \wedge B_{EF}(p))) = (B_A(p) \vee B_C(p) \vee B_{FDE}(p)) \wedge B_{EF}(p)$

Damit folgt, dass 4 Winkelwächter genügen, um ein Sechseck zu bewachen. \square

Nachdem wir nun für $n = 4, 5, 6$ die Anzahl an maximal benötigten Winkelwächtern bewiesen haben, benötigen wir nur noch folgendes Lemma, um die obere Schranke zu beweisen.

Lemma 5 *Jedes Polygon P mit mehr als 3 Ecken kann in Vierecke, Fünfecke und höchstens 1 Sechseck, dessen dualer Graph der Triangulation sternförmig ist, zerlegt werden.*

Beweis. Sei der duale Spannbaum T der Triangulation des Polygons P gegeben, welcher notwendigerweise dritten Grades ist. Wenn dieser Baum zwei, drei oder vier Knoten enthält und im Falle von vier Knoten sternförmig ist, sind wir fertig, da die Dreiecke der Triangulation ein Viereck, Fünfeck oder Sechseck bilden.

Wenn nun T mehr als vier Knoten enthält oder T vier Knoten enthält, aber nicht sternförmig ist, dann zerteilen wir den Baum rekursiv wie folgt:

Wähle ein Blatt v , so dass der Nachbar u von v eine der folgenden beiden Eigenschaften erfüllt (siehe Abbildung 11):

1. u besitzt Grad 2 und der Nachbar $w \neq v$ von u ist kein Blatt.
2. u besitzt Grad 3 und genau ein Nachbar $w, z \neq v$ von u ist ein Blatt. Sei oBdA w der innere Knoten und z das Blatt.

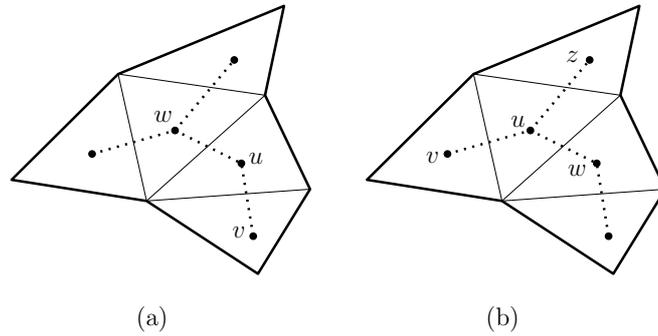


Abbildung 11: (a) Eigenschaft 1. (b) Eigenschaft 2.

Wenn u Eigenschaft 1 besitzt, dann entferne u und v aus dem Baum und speichere das Viereck, bestehend aus den Dreiecken zu den dualen Knoten u und v . Wenn u Eigenschaft 2 erfüllt, dann entferne u , v und z aus dem Spannbäum und speichere das Fünfeck bestehend aus den Dreiecken zu den dualen Knoten u , v und z . Nach dem Entfernen der Knoten u, v und ggf. z verfährt man mit den verbleibenden Teilbäumen analog, bis nur noch Bäume mit 2, 3 oder ein sternförmiger Baum mit 4 Knoten übrig bleiben.

Da wir beim Beschneiden des Baums immer nur Blätter mit ihren direkten Nachbarn entfernt haben, bleibt der Baum währenddessen zusammenhängend, so dass nur zum Schluss ein sternförmiger Baum mit 4 Knoten entstehen kann. D.h. es existiert höchstens ein Sechseck.

Außerdem kann bei diesem Verfahren kein Dreieck übrig bleiben, da dieses zu einem dualen Knoten gehören würde. Dieser Knoten könnte nur der Knoten w sein, der jedoch in beiden Eigenschaften kein Blatt ist, so dass er bei dem Entfernen der Knoten nicht übrig bleiben kann. \square

Nach diesen grundlegenden Überlegungen können wir nun die obere Schranke für beliebige Polygone beweisen.

Theorem 6 *Jedes Polygon P kann mit höchstens $n + 2(h - 1)$ Funkbaken bewacht werden und die Formel aus den Funkbakenprädikaten ist monoton und prägnant.*

Beweis. Sei die Triangulation des Polygons gegeben, dann können wir das Polygon in Vier-, Fünf- und höchstens ein Sechseck nach Lemma 5 zerlegen.

Jedes Viereck enthält zwei Dreiecke und kann nach Lemma 2 mit zwei Winkelwächtern bewacht werden. Jedes Fünfeck enthält drei Dreiecke und kann nach Lemma 3 mit höchstens drei Winkelwächtern bewacht werden. Wenn ein Sechseck vorhanden ist, dann kann dieses nach Lemma 4 mit vier Winkelwächtern bewacht werden, da der duale Graph der Triangulation nach Lemma 5 sternförmig ist. Jedes Sechseck besteht aus 4 Dreiecken.

Da die Anzahl der Winkelwächter nicht die Anzahl der Dreiecke übersteigt, benötigen wir insgesamt $n+2(h-1)$ Winkelwächter, um ein beliebiges Polygon nach dem Zerlegen in Vier-, Fünf- und höchstens ein Sechseck, zu bewachen.

Die gewünschte Formel ist die Disjunktion der Formeln für die Vier-, Fünfecke und ggf. der Formel für das Sechseck. Somit besteht jede Konjunktion aus höchstens 3 Prädikaten und somit ist die Formel in unserem Sinne prägnant. \square

Aufgrund dieser oberen Schranke kommen wir zur folgenden Vermutung.

Vermutung 7 *Es gibt eine Polygon P für das man $n - 2$ Winkelwächter benötigt.*

Dieses Ergebnis bedeutet jetzt, dass wir maximal $n + 2(h - 1)$ Winkelwächter benötigen, aber - wie wir später sehen werden - in einigen Fällen mit weniger auskommen können.

2.2 Untere Schranke

Die Frage, wie viele Wächter wir mindestens benötigen, also um wie viel können wir unsere obere Schranke in bestimmten Polygonen vielleicht verbessern, soll uns als nächstes beschäftigen.

Theorem 8 *Mindestens $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ Wächter werden benötigt, um ein beliebiges Polygon, dessen Kanten nicht kollinear sind, zu bewachen.*

Beweis. Angenommen weniger als $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ Wächter könnten ein Polygon bewachen. Dann existiert eine Kante e , die nicht kollinear mit einem Randstrahl eines Winkelwächters ist.

Sei nun R die nicht-leere Region, die vollständig innerhalb oder außerhalb der von den Winkelwächtern überdeckten Bereiche liegt und die von e in zwei Unterregionen R_1 und R_2 geteilt wird. Sei nun oBdA R_1 die Region innerhalb des Polygons und R_2 die Region außerhalb des Polygons. Dann kann kein Winkelwächter zwischen Punkten innerhalb von R_1 und Punkten innerhalb von R_2 unterscheiden, was folglich heißt, dass kein Winkelwächter zwischen Punkten innerhalb und außerhalb des Polygons innerhalb der Region R entscheiden kann. Damit folgt, dass weniger als $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ Wächter das Polygon nicht bewachen können, denn mit $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ Wächtern könnte zu mindestens

jede Kante des Polygons kollinear mit dem Rand des Sendewinkelbereichs eines Winkelwächters sein. \square

Für Polygone, deren Kanten durchaus kollinear sind, kann folgendes Theorem bewiesen werden.

Theorem 9 *Für jedes Polygon P mit n Seiten werden $\Omega(\sqrt{n})$ Winkelwächter benötigt.*

Beweis.

Sei ein Polygon P durch g Winkelwächter bewacht. Wie viele Ecken kann P höchstens haben? Die $2g$ Randstrahlen jedes Winkelwächters können sich höchstens $2(g-1)$ andere Randstrahlen schneiden, womit sich $2g \cdot 2(g-1)$ Schnittpunkte ergeben würden, und damit können dort Ecken liegen. Da jedoch jeder Schnittpunkt dann doppelt gezählt werden würde, müssen wir die Hälfte hiervon wieder abziehen, also ergibt sich $\frac{1}{2}2g \cdot 2(g-1) = 2g(g-1)$. Des Weiteren können Winkelwächter selbst in Ecken des Polygons sein, so dass höchstens $2g(g-1) + g$ Ecken geben kann, die an Schnittpunkten zwischen Randstrahlen der Winkelwächter oder am Winkelwächter selbst liegen. Vereinfacht ergibt sich $g(2g-1)$. Da nun n maximal $g(2g-1)$ sein kann ergibt sich für die Wächteranzahl $g \in \Omega(\sqrt{n})$. \square

3 Spezielle Polygone

Nachdem wir eine untere und obere Schranke für die Anzahl an benötigten Winkelwächtern für beliebige Polygone bewiesen haben, wollen wir nun für spezielle Polygonklassen obere Schranken beweisen. Wir werden als erstes konvexe Polygone untersuchen.

3.1 Konvexe Polygone

Durch die Einschränkung auf konvexe, einfache Polygone können wir folgendes zeigen.

Theorem 10 *Um ein konvexes, einfaches Polygonen zu bewachen benötigt man $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ Winkelwächter.*

Beweis. Um ein konvexes, einfaches Polygon P mit Winkelwächtern zu bewachen, beginnen wir in einer beliebigen Ecke des Polygons und platzieren dort einen natürlichen Winkelwächter. Nun fahren wir fort gegen den Uhrzeigersinn in jeder übernächsten Ecke einen natürlichen Winkelwächter zu platzieren, bis wir entweder wieder in der Startecke ankommen oder den Nachfolger der Startecke erreichen (siehe Abbildung 12).

Da nun jeder Winkelwächter das konvexe Polygon vollständig abdeckt, jede Kante kollinear mit mindestens einem Randstrahl eines Winkelwächters

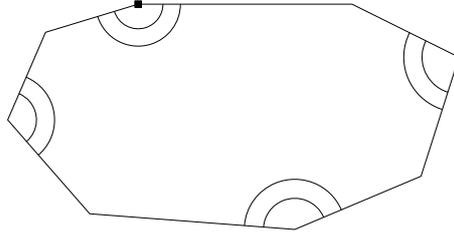


Abbildung 12: Winkelwächter in einem konvexen Polygon. Die Startecke ist mit einem Quadrat markiert.

ist und der Schnitt der Regionen die konvexe Hülle bildet, welche das Polygon selbst ist, ist die Konjunktion der Prädikate die gesuchte Formel. \square

Mit obiger unteren Schranke ist $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ optimal für konvexe Polygone. Unschön an der Lösung ist jedoch, dass die Anzahl der Prädikate in den Konjunktion von der Anzahl der Ecken abhängt, so dass $O(n)$ Prädikate benötigt werden statt der gewünschten $O(1)$ Prädikate. Wie wir jedoch in folgendem Theorem zeigen werden, kann durch Hinzunahme weniger Winkelwächter die Formel prägnant gemacht werden.

Theorem 11 *Sei P ein Polygon aus der Polygonklasse, die abgeschlossen unter Zerlegung mittels Diagonalen ist und so dass Polygone mit n Ecken aus dieser Klasse mit $f(n)$ Winkelwächter bewacht werden können. Dann kann P mittels $O(nf(c)/c)$ Winkelwächter bewacht werden, so dass man höchstens c Prädikate benötigt, um zu entscheiden, ob sich ein Punkt innerhalb des durch die Winkelwächter bewachten Bereich befindet.*

Beweis. Zuerst triangulieren wir P . Ist P kein einfaches Polygon, dann fügen wir Diagonalen derart hinzu, das der duale Graph der Triangulation ein Baum T ist. Nun verwenden wir rekursiv die Schwerpunktzerlegung⁶ [4] auf T solange an, bis ein Teilbaum höchstens die gewünschte Größe c hat. Jeder Schnitt der Zerlegung von T entspricht einem Hinzufügen von Diagonalen und dadurch entstehen $O(\frac{n}{c})$ Teilpolygone der selben Polygonklasse wie P , so dass jedes Teilpolygon mit $f(c)$ Winkelwächter bewacht werden kann. Damit können wir für P eine prägnante Formel aus der Disjunktion der Formeln für die Teilpolygone bilden. \square

Mit diesem Ergebnis können wir nun eine prägnante Formel für konvexe Polygone mit $\lceil \frac{n}{2} \rceil (1 + \epsilon)$ mit $\epsilon > 0$ Winkelwächtern bilden, so dass höchstens $O(\frac{1}{\epsilon})$ Winkelwächterprädikate benötigt werden, um zu entscheiden, ob sich ein Punkt innerhalb des bewachten Bereichs befindet.

⁶Bei der Schwerpunktzerlegung wird ein Knoten gesucht, so dass beide Teilbäume, die durch Entfernen des Knotens entstehen, ungefähr gleiche Größe besitzen. Dieser Knoten wird als Schwerpunkt bezeichnet.

3.2 Pseudodreiecke

Eine andere Art spezieller Polygone stellen Pseudodreiecke dar, die nur aus 3 konvexen Ecken und sonst nur reflexe Ecken bestehen. Auch hier können wir die obere Schranke an benötigten Winkelwächtern verbessern.

Theorem 12 Für Pseudodreiecke werden $\lceil \frac{n}{2} \rceil + O(1)$ Winkelwächter benötigt, um diese zu bewachen.

Beweis. Hierzu wählen wir einen Steinerpunkt v im Kern⁷ des Pseudodreiecks und verbinden diesen Punkt mit allen konvexen Ecken. Hierdurch entstehen drei Teile.

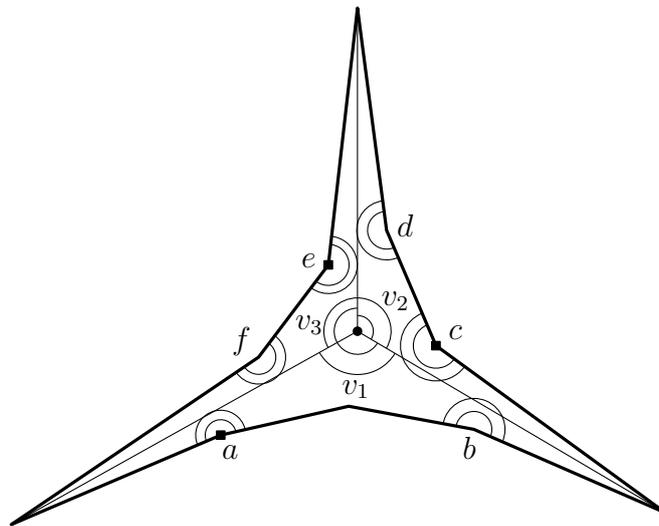


Abbildung 13: Winkelwächter in einem Pseudodreieck. Die Startecken ist mit einem Quadrat markiert.

Diese Teile können wir nun jeweils mit einem natürlichen Winkelwächter in der Ecke des Punktes v und analog zum konvexen Polygon mit einer Reihe weiterer Winkelwächter an jeder reflexen Ecke, in dem wir wieder an einer reflexen Ecke starten und in jeder übernächsten reflexen Ecke einen natürlichen Winkelwächter platzieren bis wir entweder die erste reflexe Ecke erreichen, bewachen. Die zugehörige Formel eines Teils entsteht nun durch Konjunktion des Wächters an v und der Disjunktion der Wächter an den reflexen Ecken.

Die Formel für das gesamte Pseudodreieck entsteht durch die Disjunktion der Formeln für die drei Teile. Insgesamt benötigen wir also $\lceil \frac{n}{2} \rceil + O(1)$ Wächter, da drei zusätzliche Wächter im Steinerpunkt v hinzukommen. \square

⁷Der Kern eines sternförmigen Polygons ist die Menge aller Punkte von denen man eine Gerade zu jeder Ecke des Polygons zeichnen kann ohne den Rand des Polygons zu schneiden.[5]

3.3 Orthogonale Polygone

Auch für Orthogonale Polygone, also Polygone deren Seiten parallel zu den Achsen eines kartesischen Koordinatensystem sind, können wir die obere Schranke entscheidend verbessern.

Hierfür benötigen wir folgendes Lemma, welches beim Kunstgalerieproblem Anwendung findet.

Lemma 13 *Jedes einfache orthogonale Polygon mit n Seiten kann in $\lceil \frac{n-2}{4} \rceil$ orthogonale Polygone mit höchstens 6 Seiten zerlegt werden. Diese Zerlegung kann in $O(n)$ durchgeführt werden.*

Aufbauend auf diesem Lemma können wir nun folgende Abwandlung beweisen. Da es in einem orthogonalen Polygon immer gleich viele horizontale wie vertikale Seiten gibt, muss n gerade sein, so dass wir im folgenden Lemma nur zwischen den Fällen bei denen $\frac{n-2}{2}$ gerade bzw. ungerade ist unterscheiden können.

Lemma 14 *Jedes einfache orthogonale Polygon mit n Seiten kann in $\lceil \frac{n-2}{4} \rceil$ orthogonale Polygone mit höchstens 6 Seiten zerlegt werden. Wenn $\frac{n-2}{2}$ ungerade ist, dann hat mindestens ein Teilpolygon der Zerlegung nur 4 Seiten. Diese Zerlegung kann in $O(n)$ durchgeführt werden.*

Beweis. Wenn $\frac{n-2}{2}$ ungerade ist, bilden wir die vertikale Sichtbarkeitszerlegung durch, indem wir jede vertikale Kante des Polygons bis zum gegenüberliegenden Rand verlängern (siehe Abbildung 14). Hierdurch wird das Polygon in Rechtecke zerlegt und der Graph, der entsteht, wenn man in jedem Rechteck einen Knoten platziert und Knoten verbindet, deren Rechtecke eine in der Zerlegung erzeugte Kante gemeinsam haben, ist ein Baum T .

Sei R ein Rechteck, dessen Knoten ein Blatt in T ist. Dann nehmen wir R als Teilpolygon der Zerlegung und wenden auf das restliche Polygon mit $(n-2)$ Seiten Lemma 13 an. \square

Unter Verwendung dieser beiden Lemmata können wir nun das orthogonale Polygon zerlegen, wobei möglicherweise Eckpunkte der Teilpolygone innerhalb des zerlegten Polygons liegen können.

Theorem 15 *Um ein einfaches orthogonales Polygon mit n Seiten zu bewachen, benötigen wir höchstens $\lceil \frac{3(n-2)}{4} \rceil$ Winkelwächter. Die resultierende Formel aus Winkelwächterprädikaten ist prägnant.*

Beweis. Ausgehend von der im Lemma 14 beschriebenen Zerlegung (siehe Abbildung 15(a)) bewachen wir jedes Teilpolygon wie folgt. Jedes Teilpolygon mit 6 Seiten ist L-förmige Vereinigung zweier Rechtecke kann durch einen natürlichen Winkelwächter an der reflexen Ecke und durch jeweils einen natürliche Winkelwächter in den Ecken, die nicht der reflexen Ecke

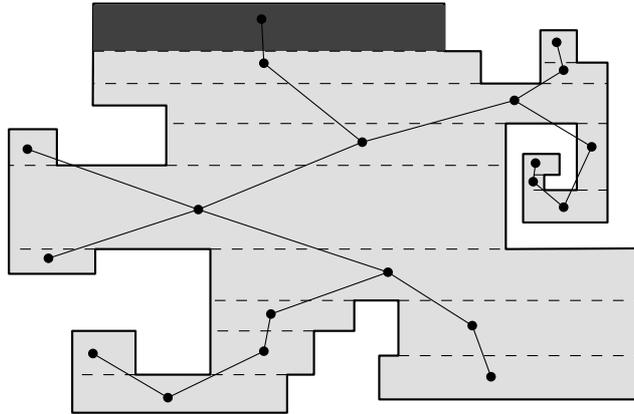


Abbildung 14: vertikale Sichtbarkeitszerlegung eines orthogonalen Polygons mit Baum T und grauem Rechteck R .

gegenüberliegenden, bewacht werden (siehe Abbildung 15(b)). Jedes Rechteck kann mit zwei natürlichen Winkelwächtern bewacht werden.

Wenn $\frac{n-2}{2}$ gerade ist, erhalten wir höchstens $\frac{3(n-2)}{4} = \lceil \frac{3(n-2)}{4} \rceil$ Winkelwächter. Wenn $\frac{n-2}{2}$ ungerade ist, benötigen wir höchstens $2 + \frac{3(n-4)}{4} = \lceil \frac{3(n-2)}{4} \rceil$, da garantiert ein Rechteck bewacht werden muss und die restlichen $\frac{n-2}{4}$ höchstens 3 Winkelwächter benötigen. Die gewünschte Formel ist die Disjunktion der Formeln für die Teilpolygone mit höchstens 3 Prädikaten. \square

3.4 Polygone mit sublinearer Wächteranzahl

Nach dem wir einige Polygone untersucht haben, die linear zur Anzahl der Ecken bzw. Seiten viele Winkelwächter benötigen, zeigen wir nun eine Klasse von Polygonen, die sublinear - nämlich $O(\sqrt{n})$ - viele Winkelwächter benötigen, um bewacht zu werden.

Theorem 16 *Es existieren einfache Polygone mit n Seiten, die mit $O(\sqrt{n})$ vielen Winkelwächter bewacht werden können.*

Beweis. Hierzu bilden wir ein Gitter aus Linien mit $4k$ horizontalen und $4k$ vertikalen Linien. Das gesuchte Polygon ist das Polygon, dessen Rand zwischen vertikalen Linien zickzack-förmig hin und her läuft, so wie in der unteren Abbildung. Hierbei liegt nun an fast allen Gitterpunkten eine Ecke des Polygons, so dass $P \Omega(k^2)$ Ecken besitzt. Indem wir nun das nächstgrößere Polygon dieser Art finden und vereinfachen, können wir für jedes n ein Polygon mit n Ecken finden, dessen Kanten auf einem Gitter

Aufgrund des obigen Ergebnisses und des Theorem 9, welches besagte, dass $\Omega(\sqrt{n})$ Winkelwächter benötigt werden, um ein Polygon, dessen Kanten kollinear sein können, zu bewachen, stellt sich die Frage, ob es nicht eine Methode gibt, um die Anzahl der verwendeten Winkelwächter zu minimieren. Da jedoch das Problem der Minimierung der Anzahl der benötigten Winkelwächter NP-Hart zu sein scheint, möchten wir hier nur ein Theorem betrachten, welches besagt, dass wir eine 2-Approximation finden können.

Theorem 17 *Für jedes Polygon P kann man in linearer Zeit ein Winkelwächterplatzierung finden, die P bewacht und in der Anzahl der verwendeten Wächter mit Faktor 2 kompetitiv ist.*

Beweis. Für jede Kante des Polygons bilden wir eine Halbebene, die das Polygon enthält und platzieren auf der Kante einen Kantenwächter. Nun kann man, mittels der Peterson CSG Formel⁸ [2] und den Halbebenen, das Polygon P bewachen. Da nun für alle Winkelwächterplatzierungen der Rand jeder Halbebene mit mindestens einem Randstrahl eines Winkelwächters kollinear sein muss, kann die minimal verwendete Anzahl an Winkelwächtern höchstens um Faktor 2 besser sein. \square

Ausgehen von dem beschriebenen Verfahren könnte man nun versuchen Halbebenen zu einer Halbebene zusammenzufassen, wenn deren Ränder kollinear sind, um so die Anzahl der Kantenwächter zu verringern.

4 Schlusswort

Wir konnten eine obere und untere Schranke für das Platzieren von Winkelwächtern zeigen, so dass ein Polygon durch diese Winkelwächter bewacht wird. Wir haben gesehen, dass für spezielle Polygone die obere Schranke entscheidend verbessert werden kann. Außerdem konnte gezeigt werden wie nicht prägnante Formeln prägnant gemacht werden können und abschließend wurde eine Approximation, die 2-kompetitiv ist, vorgestellt.

Jedoch blieben einige Fragen offen. Gibt es ein Polygon, welches nicht mit weniger als $n - 2$ Winkelwächter bewacht werden kann? (Ein Fünfeck ist trivialerweise aufgrund der unteren Schranke nicht mit weniger zu bewachen) Ist das Finden einer minimalen Winkelwächteranzahl zum Bewachen eines Polygons NP-hart?

⁸Bei dieser constructive solid geometry (CSG) Formel (z.B. Schnitt und Vereinigung zwischen geometrischen Objekten) wird ein einfaches Polygon aus Halbebenen erzeugt, so dass jede Halbebene genau einmal verwendet wird.

Literatur

- [1] V. Chvátal. A combinatorial theorem in plane geometry. In *J. Combin. Theory Ser. B*, volume 18, pages 39–41, 1975.
- [2] D. Dobkin, L. Guibas, J. Hershberger, and J. Snoeyink. An efficient algorithm for finding the CSG representation of a simple polygon. *Computer Graphics*, 22(4):31–40, 1988.
- [3] D. Eppstein, M. T. Goodrich, and N. Sitchinava. Guard placement for wireless localization, 2006.
- [4] M. T. Goodrich. Planar separators and parallel polygon triangulation (preliminary version). pages 507–516, 1992.
- [5] R. Klein. *Algorithmische Geometrie*, chapter 4.3.3, 4.4. Springer, 2005.
- [6] A. Mathias. SmartReminder: A Case Study on Context-Sensitive Applications. Technical Report TR2001-392, Hanover, NH, 2001.