Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn
Institut für Informatik I

Karl B. Schmitz

Voronoi-Spiele auf Kreis und Liniensegment

12.06.2007

Seminararbeit im SS 2007

Zusammenfassung

Wir betrachten zwei Varianten eines Voronoi-Spiels mit zwei konkurrierenden Spielern. Diese spielen abwechselnd jeweils n Steine auf einem Spielfeld aus. Dieses ist in der ersten Variante eine Kreisscheibe und in der zweiten Variante ein Liniensegment. Am Ende des Spiels wird das Spielfeld nach der „nearest-neighbor“-Regel aufgeteilt; der Spieler mit dem größeren Gebiet gewinnt. Es werden Spielstrategien für den zweiten Spieler präsentiert, die immer zu dessen Gewinn führen.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **2**

2 Das Voronoi-Spiel auf dem Kreis **2**
2.1 Die Spiegelstrategie 3
2.2 Die Keypoint-Strategie 6
2.2.1 Erweiterung der Spielregeln 6
2.2.2 Weitere Definitionen 7
2.2.3 Die Strategie 7
2.2.4 Algorithmus 9
2.2.5 Analyse 9
2.3 Erweiterung durch Mindestabstände 13

3 Das Voronoi-Spiel auf dem Liniensegment **13**
3.0.1 Weitere Definitionen 13
3.0.2 Die Strategie 14
3.0.3 Analyse 15

4 Fazit **20**

1 Einführung

Diese Ausarbeitung basiert auf dem Artikel von Ahn et al. [1], in dem das *Voronoi-Spiel* auf eindimensionalen Spielfeldern behandelt wird. Voronoi-Spiele werden von zwei Spielern im Wettstreit gespielt, die nacheinander ihre Spielsteine in einer Umgebung ausspielen. Nachdem alle Steine gelegt wurden, werden die Züge der Spieler anhand des entstandenen *Voronoi-Diagramms* bewertet. Der Spieler, durch dessen Spielsteine dabei die größeren *Voronoi-Regionen* entstehen, gewinnt das Spiel.

Abschnitt 2 behandelt die einfachste Variante des Voronoi-Spiels, nämlich die auf der Kreisscheibe. Dabei werden wir zunächst erkennen, dass ein sehr intuitiver Ansatz nicht zum Erfolg führt. Der zweite Ansatz jedoch liefert eine Strategie, die dem zweiten Spieler den Gewinn sichert. Außerdem betrachten wir eine Erweiterung der Spielregeln, bei der Mindestabstände zwischen den Spielsteinen eingeführt werden.

Abschnitt 3 behandelt dann die Variante des Voronoi-Spiels auf dem Liniensegment. Auch hier finden wir eine Strategie für den zweiten Spieler, die diesem den Gewinn sichert.

2 Das Voronoi-Spiel auf dem Kreis

Betrachten wir eine erste und sehr einfache Variante des Voronoi-Spiels - einfach in dem Sinne, dass der Handlungsspielraum der Spieler stark eingeschränkt ist. Die beiden Spieler Blau und Rot spielen dabei nacheinander ihre jeweils n *Steine* ($n > 1$) auf einem Kreisrand C aus, wobei Spieler Blau den ersten Zug ausführt. Die Spielsteine können dabei einen beliebigen Abstand zueinander haben, dürfen aber nicht aufeinander liegen. Den Kreisrand parametrisieren wir so, dass jeder Punkt p auf C auf einen Wert im Intervall $[0, 1]$ abgebildet wird. Die Werte 0 und 1 sollen dabei beide den ersten gelegten Stein auf C und gleichzeitig den nördlichsten Punkt der Kreisscheibe markieren. Dies lässt sich durch eine Rotation aller gelegten Spielsteine um den Mittelpunkt der Kreisscheibe realisieren, so dass der erste von Spieler Blau gelegte Stein gerade an der Stelle 0 liegt. Wir bezeichnen $B = \{b_i\}_{i=1}^n$ als die Stellen der gelegten Steine von Spieler Blau und $R = \{r_i\}_{i=1}^n$ als diejenigen von Spieler Rot. Nachdem alle $2n$ Steine ausgelegt wurden, werden die *Punktewerte* der Spieler berechnet durch

$$\mathbf{B} := |\{x \in C : \min_i d(x, b_i) < \min_i d(x, r_i)\}|$$

$$\mathbf{R} := |\{x \in C : \min_i d(x, r_i) < \min_i d(x, b_i)\}|$$

wobei $d(u, v)$ eine Metrik auf C ist. $|X|$ bezeichnet die Summe der Längen der Zusammenhangskomponenten von $X \subseteq C$. Da wir nur aus endlich vielen Intervallen zusammengesetzte Teilmengen von C betrachten, ist dies wohldefiniert. Der Spieler mit dem höheren Punktewert gewinnt das Spiel.

Zusätzlich bezeichnen wir ein Kreissegment von C, welches durch zwei Steine begrenzt ist und keine weiteren Steine enthält, als *Intervall*. Ein Intervall ist *einfarbig*, falls die beschränkenden Steine die gleiche Farbe haben, sonst nennen wir es *zweifarbig*. Ein *rotes Intervall* ist ein einfarbiges Intervall, das durch rote Steine begrenzt wird, und ein *blaues Intervall* wird durch blaue Steine begrenzt. Die Gesamtlänge aller roten Intervalle bezeichnen wir mit R_m, die der blauen Intervalle mit B_m. Außerdem sei $n_R(R, B)$ die Anzahl der roten Intervalle bei gesetzten roten Steinen R und blauen Steinen B, sowie $n_B(R, B)$ die Anzahl der blauen Intervalle.

Eine erste Beobachtung soll das Ermitteln der Punktewerte zu Ende des Spiels erleichtern.

Lemma 1 *Es gilt $\boldsymbol{R} - \boldsymbol{B} = R_m - B_m$, und Rot gewinnt genau dann, wenn $R_m > B_m$ erfüllt ist.*

Beweis. Offenbar wird die Gesamtlänge $x \in \mathbb{R}$ aller zweifarbigen Intervalle gleichmäßig auf die beiden Spieler verteilt. Wegen

$$\mathbf{R} = R_m + \frac{x}{2}, \quad \mathbf{B} = B_m + \frac{x}{2}$$

gilt dann

$$\mathbf{R} - R_m = \mathbf{B} - B_m \Leftrightarrow \mathbf{R} - \mathbf{B} = R_m - B_m$$

□

Lemma 1 besagt, dass bei der Auswertung des Spiels lediglich die einfarbigen Intervalle betrachtet werden müssen, um festzustellen, welcher Spieler gewonnen hat.

Wir wollen uns nun mit der Frage beschäftigen, ob es eine Strategie für Spieler Rot gibt, die diesem für jedes beliebige Verhalten von Spieler Blau den Gewinn des Spiels garantiert. Eine solche Strategie nennen wir *gewinnsichernd*. Offensichtlich lässt sich recht leicht eine Strategie formulieren, die es Spieler Rot zumindest ermöglicht, ein Unentschieden zu erreichen. Dies ist nämlich der Fall, wenn Spieler Rot jeden Spielzug von Spieler Blau "spiegelt", also seinen Stein immer auf die gegenüberliegende Seite des gerade von Blau gespielten Steins setzt.

Ein erster Ansatz, den wir im Folgenden betrachten, wäre also die Technik des Spiegelns so zu modifizieren, dass sich aus dieser eine gewinnsichernde Strategie entwickelt. Allerdings scheint dies nicht zu funktionieren, so dass später ein neuer Ansatz Anwendung finden wird.

2.1 Die Spiegelstrategie

Es soll nun eine sehr einfache und intuitive Strategie für Spieler Rot vorgestellt werden, die zwar nur fast gewinnsichernd ist, aber zumindest ein Unentschieden sichert.

Dabei wird jeder Spielzug von Blau, wie oben bereits beschrieben, gespiegelt. Eine Ausnahme bildet der letzte Zug von Rot, der dazu dienen soll, den entscheidenden Punktevorsprung zu sichern und damit das Spiel zu gewinnen. Zu beachten ist hierbei, dass unmittelbar vor dem Setzen der letzten Steine $r_n, b_n \in [0,1]$ beide Spieler die gleiche Punktzahl haben, da Spieler Rot bis dahin nur die Spielzüge von Blau gespiegelt hat. Das Setzen des letzten Spielsteins von Rot hängt dabei wiederum vom letzten von Blau gesetzten Stein b_n ab, was sich zu insgesamt drei Fällen (vgl. Abbildung 1) zusammenfassen lässt:

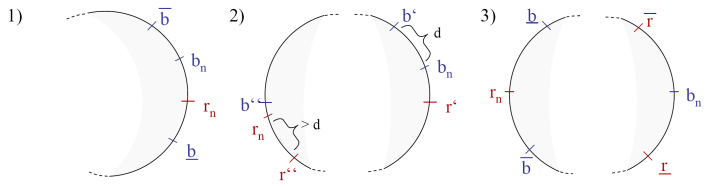

Abbildung 1: Die drei möglichen Fälle für den letzten Zug von Spieler Rot

1. Blau spielt seinen letzten Spielstein in ein blaues Intervall, begrenzt durch die Steine $\overline{b}, \underline{b} \in B$. Durch diesen Zug erhöht sich nicht der Punktewert von Spieler Blau, da das Intervall bereits ein blaues Intervall war. Durch Platzieren des letzten Steins r_n zwischen b_n und dem darauf folgenden blauen Stein $\underline{b} \in B$ kann Rot das blaue Intervall $(b_n, \underline{b})$ brechen, so dass Spieler Blau nach diesem Zug einen kleineren Punktewert hat als vorher und damit auch einen geringeren Punktewert als Spieler Rot.

2. Blau spielt seinen letzten Spielstein in ein zweifarbiges Intervall, begrenzt durch die Steine $b' \in B, r' \in R$. Hierbei erhöht sich der Punktewert von Spieler Blau um $d := |b_n - b'|$. Würde Spieler Rot auch diesen Spielzug spiegeln, so erreichte er ein Unentschieden. Es seien r'' der gespiegelte Punkt zu b' und r' der gespiegelte Punkt zu b''. Durch Platzieren von r_n näher an den blauen Spielstein $b'' \in B$, so dass $|r_n - r''| > d$ gilt, gewinnt Spieler Rot aber auch in diesem Fall das Spiel.

3. Blau spielt seinen letzten Spielstein in ein rotes Intervall, begrenzt durch die Steine $\overline{r}, \underline{r} \in R$. Dadurch entstehen aus dem einfarbigen Intervall zwei zweifarbige Intervalle, weshalb auch die genaue Positionierung des Spielsteins irrelevant ist, da die zweifarbigen Intervalle nicht bei der Punktewertung berücksichtigt werden. Dies ist der einzige Fall, in dem Spieler Rot das Spiel nicht gewinnt, und es bleibt ihm nur die Möglichkeit, auch diesen Spielzug zu spiegeln und dadurch lediglich ein Unentschieden zu erreichen.

Lemma 2 *Die Spiegelstrategie ist genau dann gewinnsichernd, wenn Spieler Blau in seinem letzten Zug kein rotes Intervall bricht. Ansonsten erzielt er ein Unentschieden.*

Beweis. Nach den Ausführungen unter Abschnitt 2.1 ist die Spiegelstrategie wohldefiniert, und aus der Aufzählung der möglichen Fälle für den letzten Zug von Spieler Blau folgt die Behauptung. □

Das folgende Lemma 3 liefert eine Bewertung des Ansatzes der Spiegelung von Spielsteinen von Spieler Blau durch Spieler Rot. Es besagt, dass dieser Ansatz keine gewinnsichernde Strategie für Spieler Rot ergeben kann.

Lemma 3 *Sei $n \geq 3$. Es existiert keine gewinnsichernde Strategie für Spieler Rot, die darin besteht, alle $n-1$ Spielzüge von Spieler Blau zu spiegeln und nur im letzten Zug von dieser Vorgehensweise abzuweichen.*

Beweis. Sei $\rho := 2(n-1)$. Betrachte die Punkte $u_i := \frac{i}{\rho}$, $0 \leq i < \rho$ auf der Kreisscheibe. Ein Beispiel ist in Abbildung 2 gezeigt. Diese Punkte teilen den Kreis in ρ viele gleichgroße Intervalle der Länge $\frac{1}{\rho}$ ein. Betrachte folgende Strategie für Spieler Blau in Zug k, $1 \leq k \leq n$:

- Für $1 \leq k < n$ setze einen Stein an die Stelle u_{k-1}.
- Für $k = n$ setze einen Stein an die Stelle $\frac{1}{2} + \frac{1}{2\rho}$ und breche damit das erste rote Intervall.

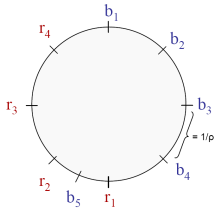

Abbildung 2: Kreisscheibe mit allen $n = 5$ gespielten blauen und $n-1$ roten Steinen

Vor dem letzten Zug von Spieler Rot gilt dann $R_m = \frac{(n-3)}{\rho}$ und $B_m = \frac{(n-2)}{\rho}$. Nun hat Spieler Rot folgende Möglichkeiten für das Setzen seines letzten Steins:

- Er bricht ein blaues Intervall. Jedes blaue Intervall hat die Länge $\frac{1}{\rho}$. Durch diesen Zug würde $R_m = B_m$ gelten, und Spieler Rot erreichte ein Unentschieden.
- Er spielt in ein rotes Intervall. Dadurch würde er keinen höheren Punktewert erhalten und um die Differenz $\frac{1}{\rho}$ verlieren.

- Er spielt in eines der beiden zweifarbigen Intervalle der Länge $\frac{1}{\rho}$. Da aber zwei Steine nicht aufeinander liegen dürfen, kann Spieler Rot dadurch höchstens ein rotes Intervall der Länge $\frac{1}{\rho} - d$, $d > 0$ erzeugen und würde insgesamt mit Punktedifferenz d verlieren.

- Er spielt in eines der beiden zweifarbigen Intervalle der Länge $\frac{1}{2\rho}$, die im letzten Zug von Spieler Blau entstanden sind. Dadurch könnte Spieler Rot ein einfarbiges Intervall der Länge $\frac{1}{2\rho} - d$, $d > 0$ erzeugen und würde auch hier verlieren - und zwar mit Punktedifferenz $\frac{1}{2\rho} + d$.

In jedem Fall ist es aber Spieler Rot bei der gegebenen Strategie von Spieler Blau nicht möglich, durch seinen letzten Zug einen Sieg herbeizuführen. □

Die Unterteilung der Kreisscheibe in $O(n)$ viele gleichgroße Segmente enthält bereits eine Idee, die im folgenden Abschnitt wieder aufgegriffen wird, wenn es um die Herleitung einer gewinnsichernden Strategie für Spieler Rot geht.

2.2 Die Keypoint-Strategie

Wir wenden uns nun einem Ansatz zu, der tatsächlich eine gewinnsichernde Strategie liefert. Hierbei ist es sogar möglich, das Regelwerk des Spiels zu erweitern und den Spielern dadurch wesentlich mehr Handlungsspielraum zu geben. Diese Erweiterungen wollen wir im folgenden betrachten.

2.2.1 Erweiterung der Spielregeln

Bisher war es den beiden Spielern zu jedem Zug nur möglich, jeweils einen Stein zu setzen. Diese Beschränkung wollen wir nun aufheben.

Sei $k \leq n$ die Anzahl der gespielten Runden, und seien β_i und γ_i die Anzahl der Steine, die die Spieler Blau und Rot in Runde i mit $1 \leq i \leq k$ legen. Dann beschränken wir diese Spielzüge durch folgende Regeln:

- In jedem Zug muss jeder Spieler mindestens einen Stein setzen, d.h. $\forall 1 \leq i \leq k : \beta_i, \gamma_i > 0$.

- Zu jedem Zeitpunkt muss Blau mindestens so viele Steine wie Rot gelegt haben, d.h. $\forall 1 \leq j \leq k : \sum_{i=1}^{j} \beta_i \geq \sum_{i=1}^{j} \gamma_i$.

- Zum Ende des Spiels muss jeder Spieler alle Steine gelegt haben, d.h. $\sum_{i=1}^{k} \beta_i = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i = n$.

- Zu Beginn darf Spieler Blau nicht alle Steine setzen, d.h. $\beta_1 < n$.

Die hierbei auftretenden Variablen k, β_i und γ_i müssen nicht im Vorhinein festgelegt werden, so dass jeder Spieler zu Beginn seines Zuges entscheiden kann, wie viele Steine er setzen möchte. Die letzte Bedingung stellt

sicher, dass es Spieler Blau nicht möglich ist, alle Schlüsselpunkte zu besetzten, denn dadurch würde Spieler Rot das Spiel nicht mehr gewinnen können.

Zu beachten ist außerdem, dass eine gewinnsichernde Strategie von Spieler Rot für die obigen Erweiterungen gewinnsichernd bleibt, wenn man das mehrfache Legen von Steinen pro Zug wieder verbietet. Dies würde nämlich dazu führen, dass $\beta_i = 1, \forall 1 \leq i \leq k$ und $k = n$ gilt, wodurch Spieler Rot mit seiner Strategie wegen obiger Bedingungen gar keine andere Wahl hätte, als ebenfalls genau einen Stein zu legen. Die Strategie von Rot müsste also nicht angepasst werden.

2.2.2 Weitere Definitionen

Zur Einführung der *Keypoint-Strategie* bedarf es einer weiteren Definition.

Definition 4 Die n Punkte $u_i := \frac{i}{n}, 0 \leq i < n$ nennen wir *Schlüsselpunkte*. Ein Intervall, dessen beide Endpunkte Schlüsselpunkte sind, nennen wir *Schlüsselintervall*. Es ist entweder einfarbig oder zweifarbig und hat immer die Länge $\frac{1}{n}$ (vgl. Abbildung 3).

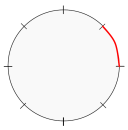

Abbildung 3: Alle Schlüsselpunkte für $n = 8$ und ein eingezeichnetes Schlüsselintervall

2.2.3 Die Strategie

Die oben definierten Schlüsselpunkte und -intervalle bilden die Grundlage für das gewinnsichernde Verhalten der im folgenden präsentierten Strategie für Spieler Rot. Dieser spielt hierbei in jedem Zug genau so viele Steine aus, dass er mit Spieler Blau gleichzieht. Die in Abbildung 4 formulierten Fallunterscheidungen werden also für jeden dieser Teilzüge betrachtet.

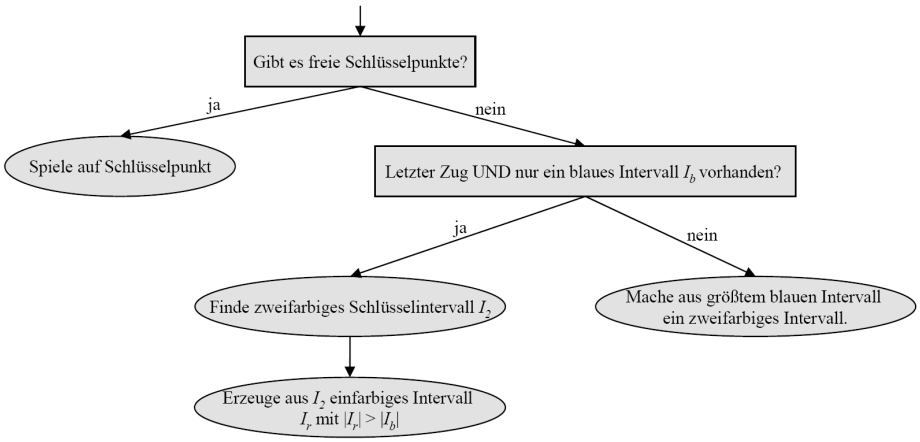

Abbildung 4: Fallunterscheidung für jeden neuen Stein von Spieler Rot.

Algorithmus 2.1 Keypoint-Algorithmus

// Input: $n \in \mathbb{N}$; $B, R \subset [0,1]$.
// Output: $R' \subset [0,1]$.
$k := |B| - |R|$; // Die Zahl der Züge, die Rot ausführen wird
$R' := R$;
for $i = 1$ **to** k **do**
  if $freeKeypointFound(R, B)$ **then**
    $r := getFreeKeypoint(R, B)$;
  else
    $I := findLargestInterval_B(B, R)$;
    if $|R'| = n - 1 \wedge countIntervals_B(B, R) = 1$ **then**
      $(r', b) := findBichromaticKeyInterval(R, B)$;
      $r := makeInterval(r', b, \frac{\frac{1}{n} + |I|}{2})$;
    else
      $r := intervalCenter(I)$;
    end if
  end if
  $R' := R' \cup \{r\}$;
end for
return R';

2.2.4 Algorithmus

Algorithmus 2.1 auf Seite 8 setzt das in Abbildung 4 gezeigte Verfahren von Spieler Rot um. Die Funktion wird dabei nach jedem Zug von Spieler Blau aufgerufen und liefert die neue Menge R' der gelegten Steine von Spieler Rot. Es werden die folgenden Hilfsfunktionen verwendet:

- $freeKeypointFound(A, B)$ liefert $true$, falls freie Schlüsselpunkte auf der Kreisscheibe vorhanden sind.
- $getFreeKeypoint(A, B)$ liefert einen beliebigen noch freien Schlüsselpunkt.
- $findLargestInterval_S(A, B)$ liefert das größte Intervall von Spieler S, das durch die Menge der gelegten Steine A und B definiert ist.
- $countIntervals_S(A, B)$ liefert die Anzahl an einfarbigen Intervallen von Spieler S, die durch die gelegten Steine A und B definiert sind.
- $findBichromaticKeyInterval(A, B)$ liefert die begrenzenden Steine $(a, b),\ a \in A,\ b \in B$ eines durch die Mengen der gelegten Steine A und B definierten zweifarbigen Schlüsselintervalls.
- $makeInterval(a, b, l)$ Gibt die Position für einen neuen Stein x mit der gleichen Farbe von a zurück, so dass (x, a) ein einfarbiges Intervall der Länge l innerhalb des Intervalls bildet, das durch die Steine (a, b) begrenzt ist.
- $intervalCenter(I)$ liefert das Zentrum des Intervalls I.

2.2.5 Analyse

Wir wollen nun zeigen, dass Algorithmus 2.1 wohldefiniert ist und eine gewinnsichernde Strategie umsetzt. Hierzu benötigen wir einige Vorbereitungen. Im Folgenden gehen wir stets davon aus, dass Spieler Rot nach der Keypoint-Strategie handelt.

Lemma 5 *Betrachte das Spielfeld vor dem Setzen des letzten Steins von Spieler Rot, d.h.* $|B| > |R| = n - 1$. *Dann existiert kein blaues Schlüsselintervall.*

Beweis. Angenommen, Spieler Blau belegt k viele Schlüsselpunkte. Damit überhaupt ein blaues Schlüsselintervall existieren kann, muss $k \geq 2$ gelten. Da Spieler Rot durch die vorgegebene Strategie mindestens einen Schlüsselpunkt besetzt, gilt $k < n$, und Spieler Blau kann damit höchstens $k - 1$ Schlüsselintervalle belegen. Die restlichen $n - k$ Schlüsselpunkte fallen Rot zu. Da nun alle Schlüsselpunkte besetzt sind, kann es keine Intervalle geben, die größer sind als ein Schlüsselintervall. Mit den verbliebenen

$|R| - (n-k) = k-1$ Steinen von Rot bricht dieser nun gemäß seiner Strategie die jeweils größten blauen Intervalle, also wenigstens alle $k-1$ blauen Schlüsselintervalle. □

Lemma 6 *Betrachte das Spielfeld vor dem Setzen des letzten Steins von Spieler Rot, d.h.* $|B| > |R| = n-1$. *Dann sind alle Intervalle von Spieler Rot Schlüsselintervalle.*

Beweis. Offensichtlich können rote Intervalle nur beim Setzen von roten Steinen entstehen. Diese aber werden gemäß der Keypoint-Strategie nur auf Schlüsselpunkte oder zwischen zwei blauen Steinen platziert, solange noch nicht der letzte Stein gespielt wird. Im ersten Fall entsteht ein rotes Schlüsselintervall, und im zweiten Fall wird ein blaues Intervall gebrochen, wodurch ein zweifarbiges Intervall entsteht. □

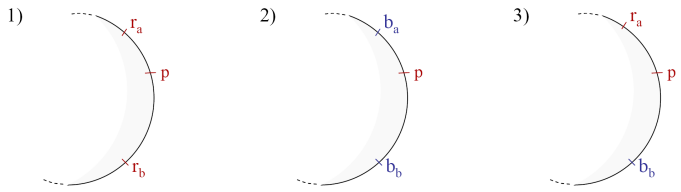

Abbildung 5: Die drei möglichen Fälle für die Positionierung von $p \in R$

Lemma 7 *Sei* $|B| \geq |R|$. *Dann gilt* $n_B(R,B) - n_R(R,B) = |B| - |R|$.

Beweis. Induktion über $|R|$. Sei $|R| = 0$. Dann ist auch $n_R(R,B) = 0$ und $n_B(R,B) = |B|$, also gilt obige Gleichung. Sei nun $|R| > 0$, und die Behauptung gelte für R', B mit $R' := R \backslash \{p\}$ und einen beliebigen Punkt $p \in R$. Also ist

$$n_B(R',B) - n_{R'}(R',B) = |B| - |R'|$$

und

$$|R| = |R'| + 1. \tag{1}$$

Nun gibt es drei Möglichkeiten für die Positionierung von p (vgl. Abbildung 5):

1. Innerhalb eines roten Intervalls zwischen zwei Punkten $r_a, r_b \in R'$. Dann gilt

$$\begin{aligned} n_R(R,B) &= n_{R'}(R',B) + 1 \\ n_B(R,B) &= n_B(R',B). \end{aligned}$$

2. Innerhalb eines blauen Intervalls zwischen zwei Punkten $b_a, b_b \in B$ (oder falls es nur einen Punkt $b \in B$ gibt und die gesamte Kreisscheibe ein blaues Intervall bildet). Dann gilt

$$\begin{aligned} n_B(R,B) &= n_B(R',B) - 1 \\ n_R(R,B) &= n_{R'}(R',B). \end{aligned}$$

3. Innerhalb eines zweifarbigen Intervalls zwischen zwei Punkten $r_a \in R'$ und $b_b \in B$. Dann gilt

$$\begin{aligned} n_R(R,B) &= n_{R'}(R',B) + 1 \\ n_B(R,B) &= n_B(R',B). \end{aligned}$$

In allen drei Fällen gilt dann

$$\begin{aligned} n_B(R,B) - n_R(R,B) &= n_B(R',B) - (n_{R'}(R',B) + 1) \\ &\overset{I.V.}{=} |B| - (|R'| + 1) \\ &\overset{(1)}{=} |B| - |R|, \end{aligned}$$

und es folgt induktiv die Behauptung. □

Der Keypoint-Algorithmus setzt die Existenz von mindestens einem blauen Intervall voraus, wenn alle Schlüsselpunkte besetzt sind. Das folgende Korollar 8 zeigt, dass ein solches Intervall vor dem Setzen von Spieler Rot immer existiert.

Korollar 8 *Sei $|B| > |R|$. Dann existiert mindestens ein blaues Intervall, d.h. $n_B(R,B) > 0$.*

Beweis. Wegen $|B| > |R| \Leftrightarrow |B| - |R| > 0$ folgt aus Lemma 7

$$n_B(R,B) - \underbrace{n_R(R,B)}_{\geq 0} > 0,$$

also ist auch $n_B(R,B) > 0$. □

Um später zeigen zu können, dass der Keypoint-Algorithmus gewinnsichernd ist, wird es erforderlich sein, dass beide Spieler die gleiche Anzahl einfarbiger Intervalle erzeugt haben, was folgendes Korollar 9 besagt.

Korollar 9 *Nach $k \leq n$ Zügen gilt $n_R(R,B) = n_B(R,B)$.*

Beweis. Es ist $|R| = |B| = k \leq n$, und aus Lemma 7 folgt

$$0 = |B| - |R| = n_B(R,B) - n_R(R,B) \Leftrightarrow n_B(R,B) = n_R(R,B).$$

□

Die beiden folgenden Aussagen ermöglichen es, unter bestimmten Umständen auf die Existenz eines zweifarbigen Schlüsselintervalls zu schließen. Solche Intervalle sind essentiell für die Keypoint-Strategie von Spieler Rot.

Korollar 10 *Sei $|B| > |R|$ und $n_B(R,B) = 1$. Dann ist $n_R(R,B) = 0$.*

Beweis. Mit $|B| - |R| > 0$ und $n_B(R,B) = 1$ folgt aus Lemma 7

$$1 - n_R(R,B) > 0 \Leftrightarrow n_R(R,B) < 1.$$

□

Lemma 11 *Angenommen, es seien alle n Schlüsselpunkte besetzt und es gilt $|R| < |B| \leq n$. Wenn es nur ein blaues Intervall gibt, und dieses eine Länge $< \frac{1}{n}$ hat, so existiert mindestens ein zweifarbiges Schlüsselintervall.*

Beweis. Da Spieler Rot noch nicht alle Steine ausgespielt hat, liegen insgesamt höchstens $2n-1$ viele Steine auf der Kreisscheibe und höchstens $2n-1-n = n-1$ viele Steine innerhalb der n vielen Schlüsselintervalle, da alle n Schlüsselpunkte besetzt sind. Demnach muss mindestens eines der Schlüsselintervalle frei von inneren Steinen sein. Da es Länge $\frac{1}{n}$ hat, kann es nicht das blaue Intervall sein, und wegen Korollar 10 ist es auch kein rotes Intervall. Folglich muss es ein zweifarbiges Schlüsselintervall sein. □

Nun wollen wir die Kernaussage dieses Abschnitts beweisen.

Theorem 12 *Algorithmus 2.1 ist wohldefiniert und gewinnsichernd.*

Beweis. Da die Kreisscheibe n Schlüsselpunkte enthält und nach unserer Definition Spieler Blau den ersten Schlüsselpunkt mit seinem ersten Stein besetzt, da er immer auf Position 0 spielt, bleiben für Spieler Rot höchstens $n-1$ viele Schlüsselpunkte zum Besetzen übrig. Demnach wird also mindestens einmal der äußere Else-Zweig innerhalb der For-Schleife des Algorithmus durchlaufen.

An dieser Stelle im Code wird nach einem größten blauen Intervall gesucht. Ein solches ist wegen Korollar 8 immer vorhanden, d.h. $n_B(R,B) \geq 1$. Betrachten wir nun den letzten Zug von Spieler Rot und insbesondere das Setzen des letzten Steins. Der Algorithmus unterscheidet hier die beiden Fälle $n_B(R,B) > 1$ und $n_B(R,B) = 1$.

Sei also zunächst $n_B(R,B) > 1$. Dann bricht Spieler Rot ein größtes blaues Intervall, $n_B(R,B)$ vermindert sich um eins und es gilt nunmehr $n_B(R,B) \geq 1$. Nach dem Setzen des letzten Steins gilt wegen Korollar 9 $n_R(R,B) = n_B(R,B) \geq 1$. Wegen Lemma 5 und Lemma 6 haben alle roten Intervalle die Länge $\frac{1}{n}$ und alle blauen Intervalle eine Länge $< \frac{1}{n}$. Also gilt $R_m > B_m$, und Spieler Rot gewinnt das Spiel.

Sei nun vor dem Setzen des letzten Steins $n_B(R,B) = 1$. Bezeichne I das letzte verbleibende blaue Intervall. Aus Lemma 5 folgt $|I| < \frac{1}{n}$. Nach Lemma 11 existiert nun ein zweifarbiges Schlüsselintervall I_2 mit Länge $\frac{1}{n}$. Nach dem Algorithmus erzeugt Spieler Rot aus I_2 ein einfarbiges Intervall I' mit $|I'| = \frac{\frac{1}{n}+|I|}{2} > \frac{|I|+|I|}{2} = |I|$. Somit gilt $|I| = B_m < R_m = |I'|$, und Spieler Rot gewinnt das Spiel auch in diesem Fall. □

2.3 Erweiterung durch Mindestabstände

Eine weitere mögliche Erweiterung des Spiels lässt sich durch das Fordern von Mindestabständen zwischen beliebigen Steinen definieren, nämlich indem zu den obigen Forderungen zusätzlich gelten muss:

$$\forall p, q \in R \cup B, p \neq q : |d(p, q)| \geq d \tag{2}$$

für ein $d \in \mathbb{R}$ mit

$$0 < d < \frac{1}{2n}.$$

Diese Erweiterung führt dazu, dass die Keypoint-Strategie nicht mehr gewinnsichernd ist, da Spieler Blau durch geschicktes Setzen seiner Steine ein Unentschieden erzwingen kann, was das Beispiel aus Abbildung 6 zeigt.

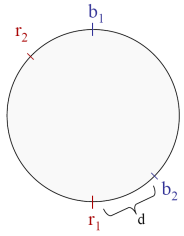

Abbildung 6: Ein Beispiel für ein durch Spieler Blau erzwungenes Unentschieden ($n = 2$).

Bemerkenswert und auch an vorherigem Beispiel gut erkennbar ist, dass die Keypoint-Strategie wieder gewinnsichernd wird, sobald man in Bedingung (2) anstatt "$\geq$" ein "$>$" fordert. Denn dadurch ist es Spieler Rot wieder möglich, in seinem letzten Zug ein größeres Intervall zu erzeugen, als es Spieler Blau besitzt.

3 Das Voronoi-Spiel auf dem Liniensegment

Betrachten wir eine neue Definition des Spielfelds. Wir spielen nun auf einem horizontalen Liniensegment, welches wir mit $[0, 1]$ parametrisieren. Im Verlauf des folgenden Abschnittes werden wir zu der Erkenntnis gelangen, dass ein zum vorherigen Abschnitt ganz ähnlicher Ansatz auch hier zu einer gewinnsichernden Strategie für Spieler Rot führt. Die folgenden Überlegungen bedürfen allerdings einiger neuer Definitionen bzw. Anpassungen an den bisherigen Definitionen.

3.0.1 Weitere Definitionen

Wir nennen das *linke Randsegment* jenes Segment zwischen 0 und einem am weitesten links liegenden Punkt l. Analog sei das *rechte Randsegment* jenes

zwischen dem am weitesten rechts liegenden Punkt r und 1. Jedes dieser beiden Segmente wird demjenigen Spieler zugesprochen, dem der zugehörige Randpunkt l bzw. r gehört. Die Vereinigung dieser beiden Segmente nennen wir das *Randintervall* und behandeln es wie die bereits zuvor eingeführten Intervalle. Das Randintervall ist einfarbig, falls die Steine auf l und r dem gleichen Spieler gehören, sonst nennen wir es zweifarbig. Es ist zu beachten, dass weder das linke noch das rechte Randsegment ein Intervall ist. Diese Segmente werden über die Variablen R_b für ein eventuelles rotes Randsegment und B_b für ein eventuelles blaues Randsegment berücksichtigt, falls das Randintervall zweifarbig ist (vgl. Abbildung 7). Ist das Randintervall einfarbig, so setzen wir $R_b = B_b = 0$. Mit dieser Erweiterung und der folgenden neuen Definition von *Schlüsselpunkten* bleiben die Aussagen aus Lemma 7, Lemma 11 und Korollar 8 erhalten.

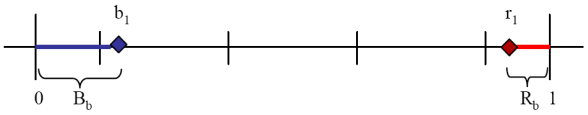

Abbildung 7: Ein Beispiel für ein zweifarbiges Randintervall mit eingezeichneten Randsegmenten

Definition 13 Die n Punkte $u_i := \frac{1}{2n} + \frac{i}{n}, 0 \leq i < n$ nennen wir *Schlüsselpunkte*. Ein Intervall, dessen beide Endpunkte Schlüsselpunkte sind, nennen wir *Schlüsselintervall*. Es ist entweder einfarbig oder zweifarbig und hat immer die Länge $\frac{1}{n}$ (vgl. Abbildung 8).

Damit ergibt sich für die Punkteberechnung aus analogen Überlegungen wie in Lemma 1:

$$\mathbf{R} - \mathbf{B} = (R_m + R_b) - (B_m + B_b) \tag{3}$$

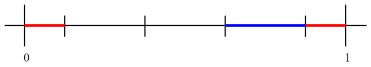

Abbildung 8: Alle Schlüsselpunkte für $n = 4$, ein eingezeichnetes Schlüsselintervall (blau) und das Randintervall (rot)

3.0.2 Die Strategie

Die in Abbildung 9 illustrierte *Line-Strategie* sorgt dafür, dass die rechte Seite von Gleichung (3) positiv, also für Spieler Rot bezüglich der neuen Regeln gewinnsichernd ist.

Diese Strategie basiert auf der Einschränkung, unter der wir auch bereits die Spiegelstrategie betrachtet haben: Pro Zug legt jeder Spieler genau einen Stein, d.h. $\forall 1 \leq i \leq n : \beta_i = \gamma_i = 1$.

3.0.3 Analyse

Bevor wir die Hauptaussage dieses Abschnitts beweisen, müssen wir wieder einige Vorbereitungen treffen. Im Folgenden gehen wir davon aus, dass Spieler Rot nach der Line-Strategie spielt. Die Bezeichnungen werden wie bisher verwendet.

Lemma 14 *Nach dem letzten Zug von Spieler Blau existieren keine blauen Schlüsselintervalle.*

Beweis. Sei k die Anzahl der von Spieler Blau belegten Schlüsselpunkte. Da Spieler Rot so viele Schlüsselpunkte wie möglich besetzt, gilt $0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, und Spieler Blau kann maximal $k-1$ viele Schlüsselintervalle erzeugen. Da nun Spieler Rot alle restlichen $n-k$ Schlüsselpunkte besetzt, hat er noch k Steine übrig, von denen er $k-1$ viele Steine verwendet, um die jeweils größten blauen Intervalle, also insbesondere alle $k-1$ blauen Schlüsselintervalle, zu brechen. □

Lemma 15 *Angenommen, es existiert mindestens ein einfarbiges Intervall. Wenn Spieler Blau außer entweder u_0 oder u_{n-1} keinen der anderen Schlüsselpunkte besetzt und Schritt 6 der Line-Strategie niemals ausgeführt wird, so gewinnt Spieler Rot.*

Beweis. Wegen Lemma 14 besitzt Spieler Blau nach seinem letzten Zug kein Schlüsselintervall. Mit $|R| = |B| = n$ folgt aus Lemma 7 $n_R(R, B) = n_B(R, B) \geq 1$. Da alle roten Intervalle Schlüsselintervalle sind, haben sie die Länge $\frac{1}{n}$, und alle blauen Intervalle haben die Länge $< \frac{1}{n}$. Also gilt $B_m < R_m$. Betrachte nun das Randintervall. Ist es einfarbig, so ist $B_b = R_b = 0$, und Spieler Rot gewinnt das Spiel. Ist es zweifarbig, so hat es einen roten Endpunkt, entweder u_0 oder u_{n-1}, da Spieler Rot gemäß seiner Strategie mindestens einen dieser Punkte besetzt und wegen des Ausbleibens von Schritt 6 keinen weiteren Stein im Randintervall platziert. Dann ist aber $R_b = \frac{1}{2n}$ und $B_b \leq \frac{1}{2n}$, also $R_b \geq B_b$, und Spieler Rot gewinnt auch in diesem Fall. □

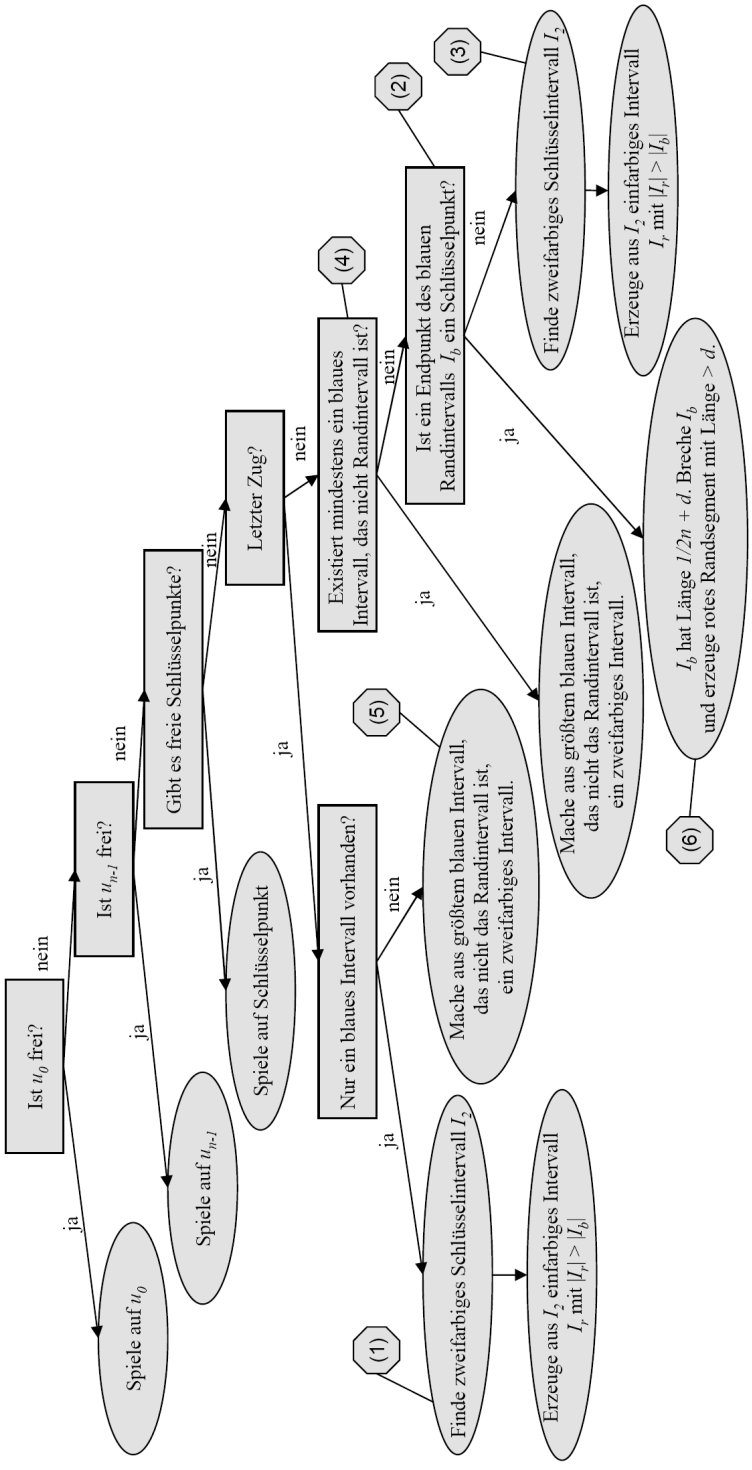

Abbildung 9: Fallunterscheidung für jeden neuen Stein von Spieler Rot.

Das folgende Lemma 16 sagt aus, dass Spieler Rot aus jedem beliebigen zweifarbigen Schlüsselintervall ein einfarbiges Intervall erzeugen kann, das größer ist als jedes andere Nicht-Schlüsselintervall.

Lemma 16 *Angenommen, auf dem Spielfeld existiert mindestens ein zweifarbiges Schlüsselintervall. Dann kann Spieler Rot mit einem Stein daraus für jedes* $0 \leq d < \frac{1}{n}$ *ein rotes Intervall mit Länge* $> d$ *erzeugen.*

Beweis. Wähle ein beliebiges zweifarbiges Schlüsselintervall I_2. Angenommen, I_2 ist nicht das Randintervall. Dann kann Spieler Rot, genauso wie auch schon bei der Variante auf der Kreisscheibe, seinen Stein so nah an den blauen Endpunkt von I_2 heransetzen, dass das entstehende rote Intervall I_r eine Länge $> d$ hat.

Sei nun I_2 das Randintervall. Dann gehört aufgrund der Strategie genau einer der Randpunkte u_0 oder u_{n-1} zu Spieler Rot. Das entsprechende Randsegment der Länge $\frac{1}{2n}$ gehört also bereits Spieler Rot. Nun kann dieser seinen Stein wieder so nah an den blauen Endpunkt des anderen Randsegments mit Länge $\frac{1}{2n}$ heransetzen, dass insgesamt auch hier ein rotes Intervall mit Länge ν $(0 < \nu < \frac{1}{2n})$ entsteht, so dass $\frac{1}{2n} + \nu > d$ gilt. □

Lemma 17 *Angenommen, Fallunterscheidung* 4 *der Strategie führt immer zum linken Teilbaum. Dann sind nach dem letzten Zug von Spieler Blau alle roten Intervalle Schlüsselintervalle.*

Beweis. Offensichtlich können rote Intervalle nur beim Setzen von roten Steinen entstehen. Spieler Rot besetzt zunächst alle verfügbaren Schlüsselpunkte, wodurch lediglich Schlüsselintervalle entstehen können. Danach verwendet Spieler Rot seine Steine lediglich zum Brechen blauer Intervalle, wodurch nur zweifarbige Intervalle entstehen können. □

Das folgende Lemma 18 untersucht den Spezialfall, dass Spieler Blau keinen einzigen Schlüsselpunkt besetzt, und stellt fest, dass Spieler Rot auch hier gewinnt.

Lemma 18 *Angenommen, Spieler Blau spielt keine Schlüsselpunkte. Dann gewinnt Spieler Rot.*

Beweis. Da Spieler Blau keine Schlüsselpunkte besetzt, werden diese aufgrund seiner Strategie von Spieler Rot besetzt. Wegen Lemma 14 existieren nach dem letzten Zug von Spieler Blau keine blauen Schlüsselintervalle, und Lemma 17 besagt, dass alle roten Intervalle Schlüsselintervalle sind. Dies gilt insbesondere auch nach dem letzten Zug von Spieler Rot, bei dem er den letzten noch verbleibenden Schlüsselpunkt besetzt. Außerdem gilt $n_R(R, B) = n_B(R, B)$ wegen Lemma 7. Insgesamt also gilt $R_m \geq B_m$, und wenn nach n Zügen mindestens ein rotes Schlüsselintervall übrig bleibt, so gilt sogar $R_m > B_m$.

Angenommen, Spieler Blau spielt keinen Stein in das Randintervall. Dann ist dieses ein rotes Schlüsselintervall, es gilt $n_R(R, B) \geq 1$, also $R_m > B_m$, $R_b = B_b = 0$, $\mathbf{R} > \mathbf{B}$, und Spieler Rot gewinnt das Spiel.

Angenommen, Spieler Blau spielt einen Stein in genau eines der beiden Randsegmente. O.B.d.A. sei dies das linke Randsegment (der andere Fall ist symmetrisch). Dann besitzt Spieler Rot das rechte Randsegment, und es gilt $B_b < R_b = \frac{1}{2n}$. Zusammen mit $R_m \geq B_m$ gilt $\mathbf{R} > \mathbf{B}$, und Spieler Rot gewinnt auch in diesem Fall.

Angenommen, Spieler Blau spielt Steine in beide Randsegmente. Dann ist das Randintervall mit Länge $< \frac{1}{n}$ einfarbig und gehört Spieler Blau, also $R_b = B_b = 0$. Verwendet Spieler Blau nun alle verbleibenden $k \leq n-2$ Steine zum Brechen der $n-1$ vielen roten Schlüsselintervalle, so entstehen dadurch nur zweifarbige Intervalle, mindestens eines der roten Schlüsselintervalle mit Länge $\frac{1}{n}$ bleibt übrig, und es gilt $B_m < R_m$, also auch $\mathbf{R} > \mathbf{B}$. Erzeugt Spieler Blau stattdessen mit den k verbleibenden Steinen mindestens ein weiteres blaues Intervall, so existieren wegen $n_R(R, B) = n_B(R, B)$ dann aber auch genauso viele rote Schlüsselintervalle, und es gilt wieder $B_m < R_m$ und $\mathbf{R} > \mathbf{B}$. □

Lemma 19 *Angenommen, im Laufe des Spiels wird mindestens einmal der rechte Teilbaum von Fallunterscheidung* 4 *der Strategie durchlaufen. Dann existiert nach dem vorletzten Zug von Spieler Rot kein blaues Intervall außer möglicherweise dem Randintervall. Außerdem gilt* $\boldsymbol{B} < \boldsymbol{R}$.

Beweis. Betrachten wir den Zug von Spieler Rot nach dem *letzten* Durchlaufen des rechten Teilbaums von Fallunterscheidung 4. Zu diesem Zeitpunkt ist also das Randintervall I_b das einzige blaue Intervall. Da aufgrund der Strategie von Spieler Rot mindestens einer der beiden Punkte u_0 bzw. u_{n-1} von diesem besetzt wird, kann es sich bei I_b nicht um ein Schlüsselintervall handeln, und es gilt $|I_b| < \frac{1}{n}$. Nun behandelt die Strategie zwei verschiedene Fälle:

Angenommen, einer der beiden blauen Endpunkte von I_b ist ein Schlüsselpunkt. O.B.d.A. sei dies u_0 (der andere Fall ist symmetrisch). Betrachte das rechte Randsegment mit Länge $d < \frac{1}{2n}$. Nun kann Spieler Rot einen Stein von links beliebig nahe an u_0 heransetzen, so dass ein rotes linkes Randsegment mit Länge $> d$ entsteht. Also gilt $B_m = R_m = 0$ und $B_b < R_b$, also $\mathbf{B} < \mathbf{R}$.

Sei nun keiner der beiden blauen Endpunkte ein Schlüsselpunkt. Dann existiert nach Lemma 11 wieder ein zweifarbiges Schlüsselintervall, welches Spieler Rot gemäß Lemma 16 nutzen kann, um ein rotes Intervall der Länge $> |I_b|$ zu erzeugen. In diesem Fall gilt also $B_m < R_m$ und $B_b = R_b = 0$, also insgesamt $\mathbf{B} < \mathbf{R}$.

Nach diesem betrachteten Zug von Spieler Rot ist die Behauptung also wahr. Betrachten wir nun die folgenden Züge von Spieler Rot, bei denen

nun immer der linke Teilbaum von Fallunterscheidung 4 durchlaufen wird. Demnach muss Spieler Blau mit jedem seiner Züge zunächst ein blaues Intervall erzeugt haben, welches Spieler Rot gemäß seiner Strategie dann wieder bricht, weshalb B_m, R_m, B_b und R_b unverändert bleiben. Demnach bleibt die Behauptung auch nach jedem dieser Züge von Spieler Rot wahr. □

Nun folgen noch weitere Aussagen, die die Wohldefiniertheit der Line-Strategie belegt.

Lemma 20 *In Fallunterscheidung* 2 *der Line-Strategie ist sichergestellt, dass das Randintervall das einzige blaue Intervall ist.*

Beweis. Es folgt aus Korollar 8, dass nach jedem Zug von Spieler Blau mindestens ein blaues Intervall existiert. Durch Fallunterscheidung 4 der Strategie werden alle anderen blauen Intervalle außer dem Randintervall ausgeschlossen. Demnach existiert genau ein blaues Intervall, und dieses ist das Randintervall. □

Lemma 21 *Die Aktionen* 1 *und* 3 *der Line-Strategie sind immer anwendbar.*

Beweis. Die in diesen beiden Fällen durchlaufenen Fallunterscheidungen der Strategie sichern, dass es höchstens ein blaues Intervall gibt, und aus Korollar 8 folgt, dass es mindestens ein blaues Intervall geben muss. Also gibt es *genau* ein blaues Intervall. Im Fall von Aktion 1 hat es eine Länge $< \frac{1}{n}$, da Spieler Blau hier bereits alle Steine ausgelegt hat und demnach Lemma 14 anwendbar ist. Im Fall von Aktion 2 hat es ebenfalls eine Länge $< \frac{1}{n}$, weil durch Fallunterscheidung 2 gesichert ist, dass das blaue Intervall nicht durch einen Schlüsselpunkt begrenzt ist.

Nun ist also Lemma 11 anwendbar, und es folgt, dass ein zweifarbiges Schlüsselintervall existiert. Demnach sind die Aktionen 1 und 3 gültig. □

Nun stehen alle Hilfsmittel zur Verfügung, um eine abschließende Analyse der Line-Strategie durchzuführen.

Theorem 22 *Die Line-Strategie ist wohldefiniert und gewinnsichernd.*

Beweis. Die Wohldefiniertheit der Line-Strategie folgt aus Lemma 20 und Lemma 21.

Zu beachten ist zunächst, dass es aufgrund der fehlenden Symmetrie des Spielfelds im Gegensatz zur Kreisscheibe möglich ist, dass Spieler Blau keinen einzigen Schlüsselpunkt besetzt. Lemma 18 sagt dann aus, dass Spieler Rot gewinnt.

Wir gehen also im Folgenden davon aus, dass mindestens einer der Schlüsselpunkte von Spieler Blau besetzt wurde. Ferner werden gemäß der Line-Strategie alle Schlüsselpunkte von Spielsteinen besetzt, und entweder u_0 oder u_{n-1} wird von Spieler Rot in seinem ersten Zug besetzt.

Betrachten wir nun Fallunterscheidung 4 der Strategie. Angenommen, es wird über das gesamte Spiel hinweg stets der linke Teilbaum der Strategie durchlaufen. Dann besitzt Spieler Rot nach Lemma 17 nur Schlüsselintervalle. Betrachten wir den letzten Zug von Spieler Rot und die k vielen blauen Intervalle, so ergeben sich wieder zwei Möglichkeiten. Für $k > 1$ besagt Lemma 14, dass Spieler Blau kein Schlüsselintervall hat. Da Schritt 6 der Line-Strategie niemals ausgeführt wird und Spieler Blau nach dem letzten Zug von Spieler Rot noch mindestens ein einfarbiges Intervall behält, ist Lemma 15 anwendbar, und es folgt, dass Spieler Rot gewinnt. Für $k = 1$, d.h. es existiert nur ein blaues Intervall I_b, gilt $|I_b| < \frac{1}{n}$ wegen Lemma 14. Wegen Lemma 11 existiert nun ein zweifarbiges Schlüsselintervall, und aus Lemma 16 folgt, dass Spieler Rot auch in diesem Fall gewinnt.

Nun wollen wir also annehmen, dass im Laufe des Spiels mindestens einmal der rechte Teilbaum von Fallunterscheidung 4 der Strategie durchlaufen wird. Betrachten wir die Situation vor dem letzten Zug von Spieler Blau. Nach Lemma 19 existiert außer möglicherweise dem Randintervall kein blaues Intervall. Angenommen, das Randintervall gehört Spieler Blau, und dieser erzeugt mit seinem letzten Stein ein weiteres blaues Intervall I_b. Dann führt Spieler Rot in seinem letzten Zug Schritt 5 der Strategie aus, bricht das gerade entstandene Intervall I_b und stellt damit den Zustand $\mathbf{B} < \mathbf{R}$ wieder her. In allen anderen Fällen existiert nach seinem letzten Zug wegen Korollar 8 genau ein blaues Intervall I_{b_2}, das nach Lemma 14 kein Schlüsselintervall ist. Nach Lemma 11 existiert nun aber ein zweifarbiges Schlüsselintervall, welches Spieler Rot nach Lemma 16 nutzt, um ein Intervall mit Länge $> |I_{b_2}|$ zu erzeugen und damit das Spiel zu gewinnen. □

4 Fazit

Wir haben zwei gewinnsichernde Strategien vorgestellt, die in eindimensionalen Umgebungen gespielt werden. Laut dem zugrunde liegenden Artikel [1] lässt sich zeigen, dass, auch wenn der zweite Spieler hierdurch stets gewinnt, es dem ersten Spieler möglich ist, die Punktedifferenz beliebig klein zu halten. Ebenso lässt sich keine Strategie für den zweiten Spieler finden, die es ihm ermöglicht, mit höherem Abstand zu gewinnen.

Leider haben diese Ergebnisse laut [1] keinen direkten Nutzen für das zweidimensionale Voronoi-Spiel. Transferiert man das Konzept der Schlüsselpunkte ins Zweidimensionale, um die Spielzüge an einem einheitlichen Gitternetz auszurichten, so stellt sich heraus, dass man auch hier um eine beträchtliche Punktedifferenz verlieren kann.

Literatur

[1] H.-K. Ahn, S.-W. Cheng, O. Cheong, M. Golin, and R. van Oostrum. Competitive facility location along a highway. Technical report, Department of Computer Science, Utrecht University. Department of Computer Science, HKUST, Hong Kong, 2001.