

RHEINISCHE FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT BONN
INSTITUT FÜR INFORMATIK I

Holger Adam

**Das Problem des
Schiffbrüchigen**

4. Mai 2007

Seminararbeit im WS 2006/2007

Zusammenfassung

Orientierungslos in einer planaren, konvexen Region sucht man den Fluchtweg mit dem kürzesten Erwartungswert. Die Region sei entweder ein unendlicher Streifen mit gleichbleibendem Seitenabstand oder ein Kreis. Berechnet werden die durchschnittlich kürzesten Wege mit zwei oder drei Segmenten für den unendlichen Streifen und die numerische Approximation für zwei Segmente im Fall des Kreises.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	2
2	Unendlicher Streifen	2
2.1	Zweisegmentiger Fluchtweg	2
2.1.1	Fall 1 - rechts Ufer ohne Kursänderung	3
2.1.2	Fall 2 - linkes Ufer nach Kurswechsel	3
2.1.3	Fall 3 - rechtes Ufer nach Kurswechsel	4
2.1.4	Fall 4 - linkes Ufer nach Kurswechsel	6
2.1.5	Fall 5 - linkes Ufer	6
2.1.6	Erwartungswert der Pfadlänge	7
2.2	Dreisegmentiger Fluchtweg	8
3	Einheitskreis	9
3.1	Fall 1 - Erreichen des Ufers ohne Kurskorrektur	10
3.2	Fall 2 - Erreichen des Ufers nach Kurskorrektur	10
3.3	Berechnung der Pfadlänge	11
4	Fazit	13

1 Einführung

Auch die schönste Kreuzfahrt kann schief gehen und man findet sich plötzlich schiffbrüchig im Ozean wieder. Was tun? Ausgehend von dieser Situation wird die Strategie gesucht, ein Ufer zu erreichen und dabei den Erwartungswert der Länge des zu schwimmenden Pfades zu minimieren. Der Einfachheit halber werden zwei Szenarien für das Gebiet betrachtet, aus dem der Schiffbrüchige zu entkommen versucht:

Die Region, in der der Schiffbrüchige sich befindet, sei ein unendlicher Streifen mit Breite 1: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}$. Die Anfangsposition innerhalb des Streifens ist unbekannt, die x-Koordinate sei jedoch gleichverteilt über $[0, 1]$. Die y-Achse stellt das linke Ufer dar, das rechte Ufer ist die Gerade durch $x = 1$. Der Schiffbrüchige hat eine anfängliche Orientierung θ , die ebenfalls gleichverteilt ist auf $[-\pi, \pi]$. Der Schiffbrüchige weiß also nicht, in welche Richtung er zu Beginn schaut. Setzt er sich in Bewegung, geht man von einer konstanten Geschwindigkeit aus. Außerdem verzichtet man auf Berücksichtigung seines Sichtfeldes, wodurch ein Ufer erst dann als erreicht gilt, wenn der Schiffbrüchige dort angekommen ist und sein Kurs nicht von Beobachtungen abhängt. Betrachtet werden Fluchtstrategien, deren Pfade maximal zwei oder drei Segmente enthalten.

Das zweite Szenario ist der Einheitskreis $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Die Ausgangsposition des Schiffbrüchigen ist hier gleichverteilt über der Kreisfläche, da durch die Symmetrie keine explizite Annahme notwendig ist. Seine Orientierung richtet sich nach der Geraden durch seine Position und dem Kreismittelpunkt. Gesucht wird die optimale Fluchtstrategie mit maximal zwei Segmenten.

2 Unendlicher Streifen

Aufgrund von Symmetrieeigenschaften innerhalb des Streifens können vereinfachende Annahmen getroffen werden: Die Anfangsposition des Schiffbrüchigen befinde sich auf der x-Achse, $(x, 0)$, $0 \leq x \leq 1$, und seine Orientierung beschränkt sich auf den oberen Teil des Streifens, liegt also im Halbkreis $0 \leq \theta \leq \pi$.

2.1 Zweisegmentiger Fluchtweg

Der Fluchtpfad soll dann ein zweites Segment enthalten, wenn der Schiffbrüchige eine bestimmte Distanz in Richtung θ zurückgelegt hat, ohne eines der beiden Ufer zu erreichen. Diese Konstante wird mit $r \geq 0$ bezeichnet. Tritt dieser Fall ein, soll die Route um einen Winkel α , $0 \leq \alpha \leq \pi$, korrigiert werden und der Schiffbrüchige schwimmt dann solange weiter, bis er

ein Ufer erreicht. Insgesamt ergeben sich fünf Fälle, wie die Flucht verlaufen kann (siehe Abb. 1). Wie nachfolgend zu sehen, gibt es für das Erreichen des linken Ufers mit zwei Segmenten zwei verschiedene Fälle, während für das rechte Ufer nur ein Fall mit zwei Segmenten betrachtet wird. Diese Unterteilung folgt aus den Bereichen für $\theta + \alpha$. Das linke Ufer erreicht man, wenn $\theta + \alpha < \frac{\pi}{2}$ oder $\frac{3\pi}{2} < \theta + \alpha$, während das rechte Ufer erreicht wird, wenn $\frac{\pi}{2} < \theta + \alpha < \frac{3\pi}{2}$ gilt. Für jeden dieser Bereiche ist eine eigene Betrachtung notwendig, woraus sich die Fälle 2-4 ergeben. Für $-\pi \leq \theta \leq \pi$ reicht es, die vorgestellten Fälle vertikal und horizontal zu spiegeln.

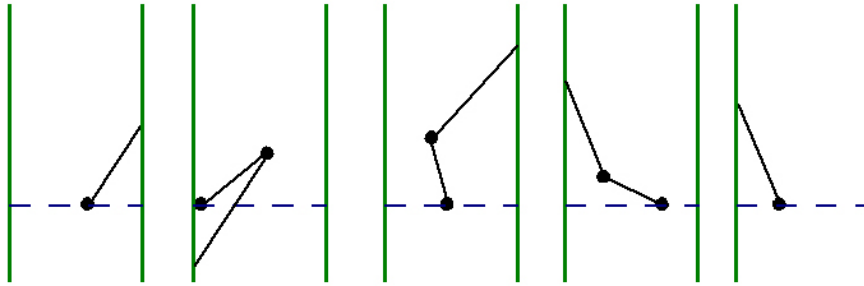


Abbildung 1: Die fünf möglichen Fälle bei Betrachtung des Fluchtpfades mit maximal zwei Segmenten.

2.1.1 Fall 1 - rechts Ufer ohne Kursänderung

Der Schiffbrüchige schwimmt in Richtung θ und erreicht die rechte Küste, ohne eine Distanz $> r$ zurückgelegt zu haben. Dies tritt dann ein, wenn die Orientierung eher nach rechts als nach oben zeigt. Der Winkel θ darf also nicht so groß sein, dass der Schwimmer auf seinem Weg zum rechten Ufer weiter als r schwimmen muss. Dafür müssen zwei Bedingungen erfüllt sein:

$x + r \geq 1$, da sonst selbst bei einer Bewegung auf der x-Achse nach rechts der Schwimmer nie das rechte Ufer erreichen kann. Außerdem muss $\theta \leq \arccos\left(\frac{1-x}{r}\right)$ gelten, da sonst der Winkel so groß wird, dass das rechte Ufer nicht in r zu erreichen ist (siehe Abb. 2).

Der zurückgelegte Weg q berechnet sich direkt aus $\cos(\theta) = \frac{1-x}{q}$, und hat die Länge somit die Länge $\frac{1-x}{\cos(\theta)}$.

2.1.2 Fall 2 - linkes Ufer nach Kurswechsel

Der Schiffbrüchige schwimmt auf das rechte Ufer zu, erreicht es nicht in r , dreht um α , und erreicht danach das linke Ufer. Dazu muss auf jeden Fall $\theta < \frac{\pi}{2} - \alpha$ gelten, da sonst nicht das linke Ufer erreicht wird (siehe Abb. 3). Außerdem muss $x + r < 1$ sein, falls $\theta = 0^\circ$ gilt, oder $x + r \geq 1 \wedge \arccos\left(\frac{1-x}{r}\right) < \theta$ gilt. Die zweite Möglichkeit stellt das Gegenteil zu Fall

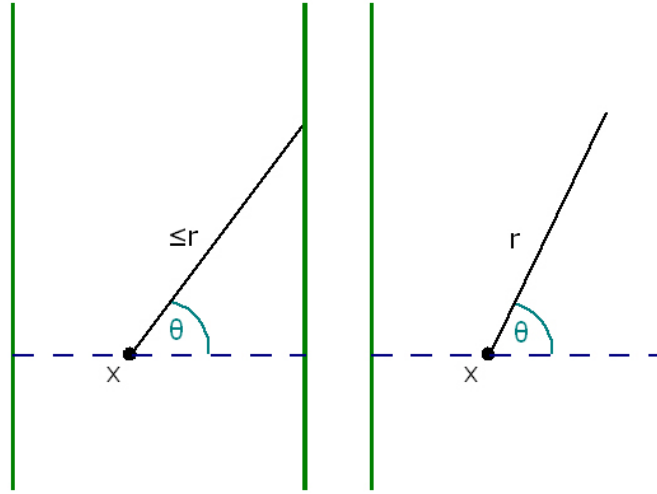


Abbildung 2: Links: Der Schwimmer erreicht das rechte Ufer, ohne den Kurs zu ändern. Rechts: θ ist zu groß, so dass das rechte Ufer nicht in r zu erreichen ist.

1 dar, da θ hier so groß sein muss, dass das rechte Ufer nicht in r erreicht wird. Als Pfadlänge ergibt sich dann $q = r + \frac{x+r \cos(\theta)}{\cos(\theta+\alpha)}$. Fällt man ein Lot vom Punkt des Kurswechsels auf das linke Ufer, lässt sich die zurückgelegte Strecke im zweiten Teil der Flucht berechnen aus dem Winkel zwischen zweitem Segment und y-Achse (dessen Sinus gleich dem Kosinus von $\theta + \alpha$ ist) und der oberen Seite des Dreiecks, die sich zusammensetzt aus x und $r \cos(\theta)$.

2.1.3 Fall 3 - rechtes Ufer nach Kurswechsel

Der Schiffbrüchige schwimmt eine Strecke der Länge r , ohne ein Ufer zu erreichen. Dann ändert er seinen Kurs um den Winkel α und schwimmt in die neue Richtung weiter, bis er das rechte Ufer erreicht. Damit der Schwimmer nach der Drehung um α nicht das linke Ufer ansteuert, muss immer $\frac{\pi}{2} - \alpha \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} - \alpha$ gelten (siehe Abb. 4). Außerdem muss eine der folgenden vier Bedingungen erfüllt sein:

$$x + r < 1 \wedge x - r > 0$$

Gilt dies nicht, kann durch Bewegung auf der x-Achse eines der beiden Ufer erreicht werden, bevor der Kurs korrigiert wird.

$$x + r < 1 \wedge x - r \leq 0 \wedge \theta < \pi - \arccos\left(\frac{x}{r}\right)$$

Falls das linke Ufer durch ausreichend großes r ohne Kursänderung erreicht werden kann, muss θ so klein sein, dass der Schwimmer innerhalb des Strei-

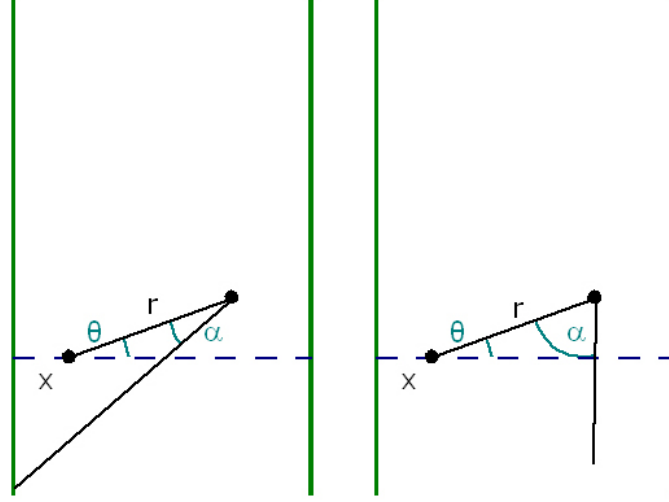


Abbildung 3: Links: Der Schwimmer erreicht das linke Ufer, nachdem er den Kurs geändert hat. Rechts: $\theta + \alpha$ ist zu groß, so dass das linke Ufer nicht erreicht werden kann.

fens r zurücklegt, ohne das linke Ufer zu erreichen.

$$x + r \geq 1 \wedge x - r > 0 \wedge \arccos\left(\frac{1-x}{r}\right) < \theta$$

Analog gilt hier, dass θ so groß sein muss, dass nicht das rechte Ufer in r erreicht wird, wenn dies durch ausreichend großes x und r möglich ist.

$$x + r \geq 1 \wedge x - r \leq 0 \wedge \arccos\left(\frac{1-x}{r}\right) < \theta < \pi - \arccos\left(\frac{x}{r}\right)$$

Hier können durch die Einschränkung von x und r beide Ufer durch Bewegung auf der x -Achse erreicht werden. Daher muss θ auf den Bereich beschränkt sein, in dem der Schiffbrüchige r zurücklegt, ohne ein Ufer zu erreichen.

Die Pfadlänge setzt sich dann aus r und dem Stück nach der Richtungsänderung zusammen und beträgt $r + \frac{x-1+r \cos(\theta)}{\cos(\theta+\alpha)}$. Da in diesem Fall $\cos(\theta + \alpha)$ immer negativ ist, wurde der Zähler mit -1 multipliziert, um eine negative Pfadlänge als Ergebnis auszuschließen. Im Zähler ist außerdem noch zu beachten, dass das Vorzeichen von $\cos(\theta)$ dafür sorgt, dass bei einer Überlappung von x und $r \cos(\theta)$ eine Addition zu $1 - x$ passiert, während bei einer Überlappung von $1 - x$ und $r \cos(\theta)$ von 1 sowohl x als auch $r \cos(\theta)$ subtrahiert werden. Der Zähler vor Multiplikation mit -1 ist also $1 - x - r \cos(\theta)$.

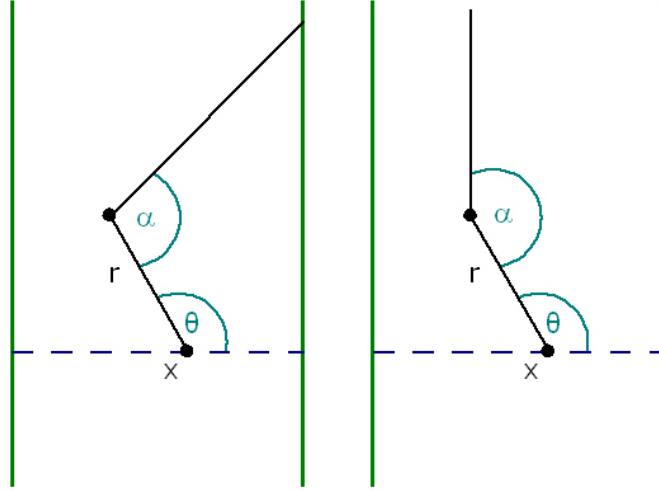


Abbildung 4: Links: Der Schwimmer erreicht das rechte Ufer, nachdem er den Kurs geändert hat. Rechts: $\theta + \alpha$ ist zu groß, so dass das rechte Ufer nicht erreicht werden kann.

2.1.4 Fall 4 - linkes Ufer nach Kurswechsel

Der Schwimmer nimmt Kurs auf das linke Ufer, erreicht dieses jedoch nicht innerhalb von r . Er korrigiert den Kurs um α und erreicht dann das linke Ufer. Für diesen Fall muss $\theta > \frac{3\pi}{2} - \alpha$ gelten, da sonst das linke Ufer nicht erreicht wird (siehe Abb. 5). Zusätzlich muss entweder $x - r > 0$ sein, damit das linke Ufer nicht auf direktem Weg auf der x-Achse erreicht werden kann, oder $x - r \leq 0 \wedge \theta < \pi - \arccos\left(\frac{x}{r}\right)$. Ist also r so groß, dass man durch Schwimmen auf der x-Achse nach links das linke Ufer ohne Kursänderung erreicht, so muss θ so klein sein, dass eine Kursänderung zwingend erforderlich ist. Die Pfadlänge ist gleich der von Fall 2.

2.1.5 Fall 5 - linkes Ufer

Analog zu Fall 1 schwimmt der Schiffbrüchige nicht weiter als r , bis er am Ziel (in diesem Fall das linke Ufer) ist. Um dieses zu erreichen, muss $x - r \leq 0$ gelten, da sonst die Möglichkeit besteht, dass der Schiffbrüchige auf der x-Achse nach links schwimmt und das Ufer nicht in r erreicht. Die Orientierung muss dabei in Richtung linkes Ufer zeigen, $\pi - \arccos\left(\frac{x}{r}\right) \leq \theta$ muss also erfüllt sein. Ist θ zu klein, schwimmt der Schiffbrüchige r , ohne das linke Ufer zu erreichen (siehe Abb. 6). Die zurückgelegte Strecke des Schiffbrüchigen beträgt in diesem Fall $-\frac{x}{\cos(\theta)}$, da der Kosinus von θ in diesem Winkelbereich negativ ist, eine negative Pfadlänge jedoch nicht existieren kann.

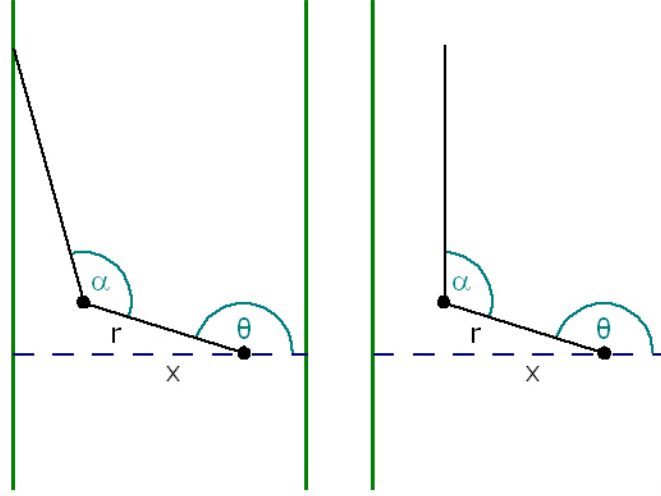


Abbildung 5: Links: Der Schwimmer erreicht das linke Ufer nach Kursänderung, da r zu klein ist. Rechts: $\theta + \alpha$ ist zu klein, so dass das linke Ufer nicht erreicht werden kann.

2.1.6 Erwartungswert der Pfadlänge

Bei genauerer Betrachtung von Fall 2 und 4 fällt auf, dass die Pfadlänge der beiden Fälle größer ist als die Pfadlänge im dritten Fall, bedingt durch den kleineren Zähler $x - 1 + r \cos(\theta) < x + r \cos(\theta)$. Wie in der Berechnung der Pfadlänge von Fall 3 zu sehen, spielen die Vorzeichen von $\cos(\theta)$ und $\cos(\theta + \alpha)$ bei diesem Vergleich keine Rolle. Man kann also davon ausgehen, dass ein Fluchtweg zum linken Ufer länger ist als ein Fluchtweg zum rechten Ufer, wenn der Weg aus zwei Segmenten besteht. Möchte man die beiden Fälle ausschließen, muss α entsprechend beschränkt werden, so dass nur Fall 3 in der Berechnung des Erwartungswerts auftaucht.

Für $\theta = \pi$ darf also nicht das linke Ufer erreicht werden, α muss kleiner als $\frac{\pi}{2}$ sein. Zeigt θ in Richtung rechtes Ufer, darf α nicht so klein sein, dass trotzdem das linke Ufer erreicht wird: $\frac{\pi}{2} - \alpha < \arccos\left(\frac{1}{r}\right)$. Um die Strategien auszuschließen, mit denen das linke Ufer erreicht wird, muss also $r > 1$ und $0 < \frac{\pi}{2} - \alpha < \arccos\left(\frac{1}{r}\right)$ gelten.

Für Fall 2 ergibt sich damit ein Widerspruch zu $x + r < 1$ durch $r > 1$. $\theta > \arccos\left(\frac{1-x}{r}\right)$ kann nicht gelten, da $\theta < \frac{\pi}{2} - \alpha < \arccos\left(\frac{1}{r}\right) < \arccos\left(\frac{1-x}{r}\right)$.

In Fall 4 ist $x - r > 0$ unmöglich, da $r > 1$ und $x \in [0, 1]$, außerdem ist $\theta > \frac{3\pi}{2} - \alpha$ zusammen mit $\frac{\pi}{2} > \alpha$ ein Widerspruch zur ursprünglichen Annahme, dass $0 \leq \theta \leq \pi$, da $\theta > \frac{3\pi}{2} - \alpha > \pi$ folgt. Mit diesen Annahmen erreicht man, dass im Falle eines erforderlichen Kurswechsels der Schwimmer nur das rechte Ufer erreicht, was Fall 3 entspricht. Ohne Kurswechsel können nur Fall 1 und 5 auftreten. Die Integrationsbereiche von x und θ bleiben hierbei unverändert.

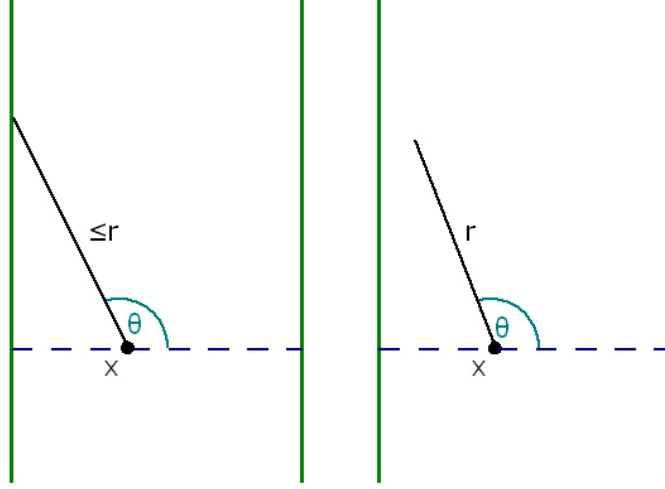


Abbildung 6: Links: Der Schwimmer erreicht das linke Ufer ohne Kursänderung. Rechts: θ ist zu klein, so dass das linke Ufer nicht erreichbar ist.

Um α und r optimal zu wählen, integriert man über die drei verbleibenden Fälle in den gültigen Bereichen von x und θ , also über $[0, 1]$ und $[0, \pi]$. Die Integration über $[0, \pi]$ ergibt sich genau aus den aufgestellten Bedingungen für die drei betrachteten Fälle.

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 \left[\int_0^{\arccos(\frac{1-x}{r})} \frac{1-x}{\cos(\theta)} d\theta + \int_{\arccos(\frac{1-x}{r})}^{\pi - \arccos(\frac{x}{r})} \left(r + \frac{x-1+r\cos(\theta)}{\cos(\theta+\alpha)} \right) d\theta - \int_{\pi - \arccos(\frac{x}{r})}^{\pi} \frac{x}{\cos(\theta)} d\theta \right] dx$$

Das Integral in geschlossener Form gelöst und minimiert werden, wodurch man $r = 1.04326686$ und $\alpha = 78.7^\circ$ als optimale Werte für die Parameter eines zweisegmentigen Fluchtpfades erhält, wenn die Startposition und -orientierung gleichverteilt sind. Der gesuchte Erwartungswert der zu schwimmenden Strecke ist dann 0.8869669056.

2.2 Dreisegmentiger Fluchtweg

Betrachtet man die Erweiterung des Fluchtweges um einen drittes Segment, muss ausgehend von den bisherigen Betrachtungen nur Fall 3 in zwei neue Fälle unterteilt werden. Sei $s \geq 0$ die Strecke, nach der eine zweite

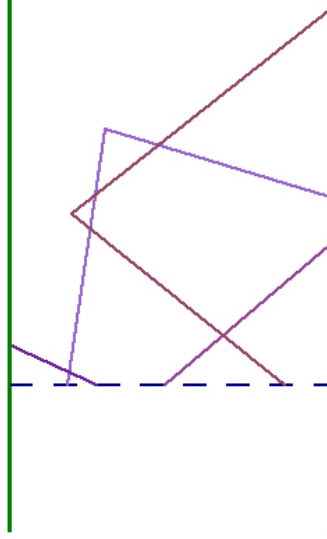


Abbildung 7: Samplerealisierungen mit den optimalen Werten $r = 1.04326686$ und $\alpha = 78.7^\circ$.

Kursänderung stattfindet und β der Winkel dieser Kursänderung. Es kann nun passieren, dass der Schiffbrüchige ein Ufer mit zwei Segmenten erreicht, was dem bisherigen Fall 3 entspricht, oder er schwimmt $r + s$, ohne eines der Ufer zu erreichen. β wird dabei so beschränkt, dass eine Selbstkreuzung des Fluchtweges ausgeschlossen ist (siehe Abb. 8). Das um den neuen Fall erweiterte Integral des zweisegmentigen Fluchtpfades ist nicht mehr in geschlossener Form lösbar. Durch Integration nach θ ergibt sich nach [2] ein Erwartungswert der Weglänge von 0.8835534788, was eine nur leichte Verbesserung gegenüber den zwei Segmenten darstellt.

3 Einheitskreis

Das andere Areal, in dem der Schiffbrüchige sich wiederfinden kann, ist ein Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0, 0)$. Wie bisher sei die Startposition x gleichverteilt auf $[0, 1] \times 0$, die Orientierung kann nun aber in eine beliebige Richtung zeigen: $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Für den Fall einer Kursänderung gelten für α die gleichen Bedingungen wie im unendlichen Streifen, r kann jedoch wegen des Kreisdurchmessers aus $[0, 2]$ gewählt werden. Betrachtet man in diesem Szenario einen Fluchtpfad mit maximal zwei Segmenten, können zwei unterschiedliche Fälle auftreten.

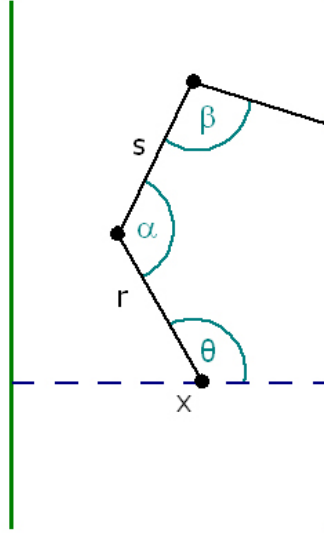


Abbildung 8: Der entstehende neue Fall, wenn in $r + s$ kein Ufer erreicht wird.

3.1 Fall 1 - Erreichen des Ufers ohne Kurskorrektur

Der Schwimmer erreicht das Ufer, bevor er eine Distanz r zurückgelegt hat und seinen Kurs anpasst. Dieser Fall tritt ein, wenn $x < r - 1$, wenn also r so groß ist, dass durch Schwimmen auf der x-Achse nach links das Ufer erreicht werden kann, ohne den Kurs zu ändern. Ist r nicht so groß, dann ist der Fluchtweg nur dann einsegmentig, wenn $x \geq |r - 1|$ und θ auf den Bereich $-\varphi \leq \theta \leq \varphi$ beschränkt ist, wobei $\varphi(x, r) = \arccos\left(\frac{1-x^2-r^2}{2xr}\right)$ sei. φ beschreibt hierbei den Winkel zwischen $1 - x$ und r , wenn r den Kreis tangiert. Anschaulich legt man einen Kreis mit Radius r durch x und erhält durch die beiden Strecken von x zu den Schnittpunkten der beiden Kreise den Bereich, in dem θ ausreichend klein ist, so dass der Schiffbrüchige das Ufer innerhalb von r erreicht (siehe Abb. 9). Für die Pfadlänge q betrachtet man das Dreieck mit den Seiten $\triangle(1, x, q)$ und errechnet die Pfadlänge mit Hilfe des Kosinussatzes. Diese beträgt dann $q = -x \cos(\theta) + \sqrt{1 - x^2 \sin^2(\theta)}$.

3.2 Fall 2 - Erreichen des Ufers nach Kurskorrektur

Eine Kursänderung im Kreisszenario passiert genau dann, wenn die Bedingungen für Fall 1 nicht erfüllt werden. Zur Berechnung der Pfadlänge braucht man neben r die Länge des zweiten Segments. Dazu wird das Hilfsdreieck $\triangle(r, x, y)$ betrachtet, wobei y die Strecke zwischen Kreismittelpunkt und Punkt des Kurswechsels bezeichnet, die einfach aus dem Kosinussatz zu errechnen ist und $y = \sqrt{x^2 + r^2 + 2xr \cos(\theta)}$ beträgt. Aus $\triangle(r, x, y)$ wird

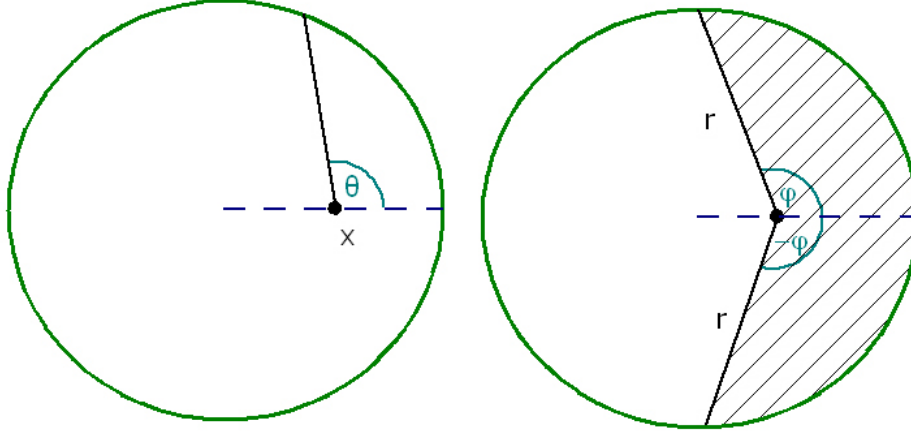


Abbildung 9: Links: Der Fluchtpfad hat nur ein Segment. Rechts: Der Bereich für θ abhängig von r , in dem nur ein Segment benötigt wird.

der Winkel ω zwischen r und y benötigt, der zusammen mit α den Winkel gegenüber der Seite 1 im Dreieck $\triangle(1, s, y)$ bildet (siehe Abb. 10). Zur Berechnung von ω benötigen wir $\psi(x, r) = \arccos\left(-\frac{r}{x}\right)$. ψ bezeichnet den Winkel zwischen $1 - x$ und r für den Fall, dass der Winkel zwischen r und y genau $\frac{\pi}{2}$ ist. Wird θ größer oder kleiner als ψ , so wird ω größer oder kleiner als $\frac{\pi}{2}$. ω berechnet sich dann wie folgt:

$$\omega = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{x \sin(\theta)}{y}\right) & |(x \geq r \wedge -\psi \leq \theta \leq \psi) \vee x < r \\ \pi - \arcsin\left(\frac{x \sin(\theta)}{y}\right) & |x \geq r \wedge (0 \leq -\psi \vee \psi \leq \theta) \end{cases}$$

Der zweite Fall tritt ein, wenn $\omega > \frac{\pi}{2}$ ist. Da $\arcsin\left(\frac{x \sin(\theta)}{y}\right)$ nur Werte bis $\frac{\pi}{2}$ liefert, entspricht $\omega > \frac{\pi}{2}$ dann dem zweiten Fall. Da nun alle Seitenlängen des Dreiecks und ein Winkel bekannt sind, lässt sich der Kosinussatz auf das Dreieck anwenden und man erhält $s = y \cos(\alpha + \omega) + \sqrt{1 - y^2 \sin^2(\alpha + \omega)}$.

3.3 Berechnung der Pfadlänge

Die Integration über x und θ unterteilt sich in zwei Integrale, da wegen $x \geq |r - 1|$ unterschieden werden muss, ob x diese Bedingung erfüllt und falls nicht, ob r größer oder kleiner als 1 ist, um eine negative Integrationsgrenze zu vermeiden.

Zu Betrachtung des Falls $x \geq |r - 1|$ definiere

$$f = \int_{-\varphi}^{\varphi} q d\theta + \int_{\varphi}^{\pi} (r + s) d\theta + \int_{-\pi}^{-\varphi} (r + s) d\theta$$

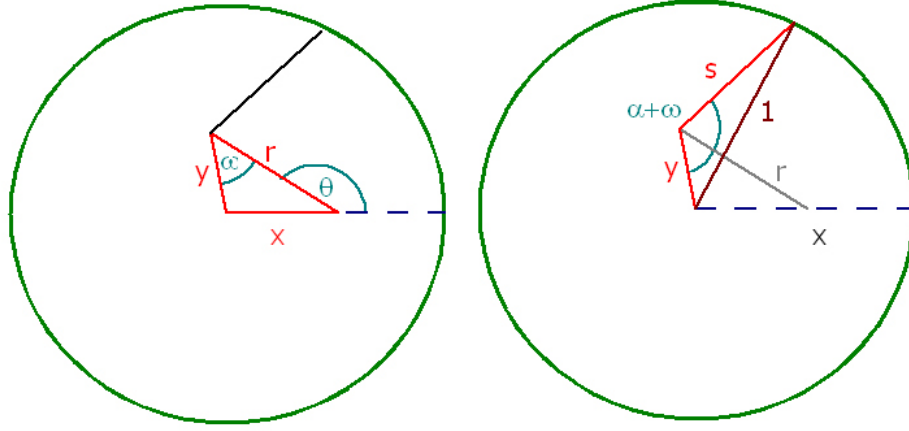


Abbildung 10: Links: Das Dreieck $\triangle(r, x, y)$ und der Winkel ω . Rechts: Das Dreieck $\triangle(1, s, y)$ und $\alpha + \omega$.

als die Integration über θ , wobei abhängig von diesem Winkel ein oder zwei Segmente im Fluchtpfad auftreten können. Sei dann

$$I = \frac{1}{\pi} \int_{|r-1|}^1 f(x, r, \alpha) x dx$$

das Integral über die möglichen Startpositionen auf der x-Achse für das Intervall, in dem x die Bedingung erfüllt.

Erfüllt x die Bedingung nicht, ist anhand von r zu unterscheiden, ob der Fluchtpfad ein oder zwei Segmente enthält. Sei hierzu

$$g = \int_{-\pi}^{\pi} q d\theta \quad h = \int_{-\pi}^{\pi} (r + s) d\theta$$

die Integrale für den ein- und zweisegmentigen Fall. Dann gilt:

$$J = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_0^{r-1} g(x) x dx & |r \geq 1 \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{-r+1} h(x, r, \alpha) x dx & |r < 1 \end{cases}$$

Die erwartete Pfadlänge insgesamt entspricht dann $I + J$. Durch numerische Approximation erhält man $I + J = \frac{8}{3\pi} = 0.8488263631$, falls $\alpha = \pi$ gewählt wird, wodurch $r \geq 0$ beliebig groß sein kann. Für $\alpha \neq \pi$ gilt immer $I + J > \frac{8}{3\pi}$.

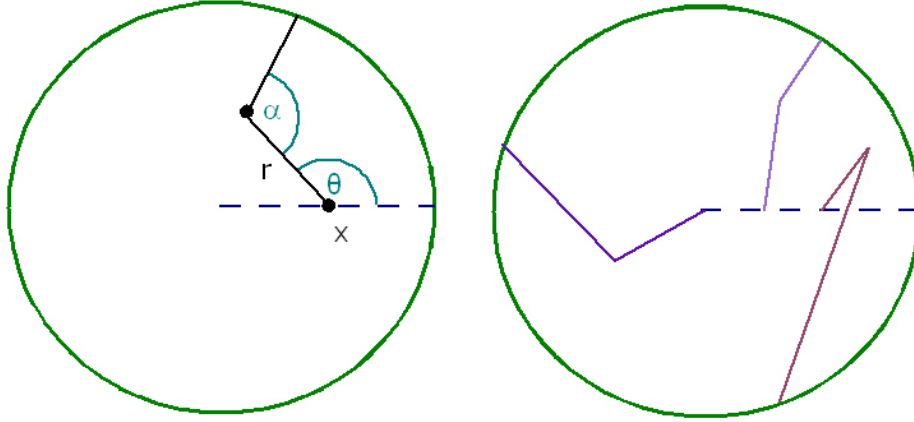


Abbildung 11: Links: Zweisegmentiger Fluchtpfad im Kreis. Rechts: Samp-lerealisierungen mit $r = 0.5$, $x = 0.1, 0.3, 0.5$, $\alpha = 110^\circ, 160^\circ, 20^\circ$, $\theta = 200^\circ, 80^\circ, 45^\circ$.

4 Fazit

Mit der hier vorgestellten Technik erhält man für das Szenario des unendlichen Streifens einen minimalen Erwartungswert für die Länge des Fluchtweges im zweisegmentigen Fall. Eine leichte Verbesserung stellt sich durch die Hinzunahme eines dritten Segments ein. Die Bedingungen der Fallunterscheidungen und die daraus resultierenden Berechnungen werden jedoch deutlich komplexer. Im Fall des Einheitskreises lässt sich $\frac{8}{3\pi}$ als untere Schranke für den Erwartungswert verifizieren.

In [3] und [4] stellte Zalgaller eine andere Herangehensweise für das erste Szenario vor, deren Ergebnis ungefähr minimal sein soll. Er verwendete dafür eine spezielle Konstruktion von vier Segmenten zwischen fünf fest gegebenen Punkten und errechnete einen Erwartungswert von 0.9523 für die Pfadlänge. Approximiert man Zalgallers Ansatz durch zwei Segmente mit gegebenem r und α , erhält man einen Erwartungswert von 0.9188, der ungefähr der Lösung von Zalgaller entspricht. Wie hier gezeigt wurde, ist dieses Ergebnis jedoch nicht annähernd optimal, wie das oben errechnete Optimum 0.8869669056 für zwei Segmente zeigt.

Weitere Forschung in diesem Bereich könnte Betrachtungen für beliebiges β im dreisegmentigen Fall oder die Berechnung von r und α auf Basis des Medians der Verteilungen für x und θ umfassen. Für ein allgemeineres Szenario sei auf [1] verwiesen, wo der Erwartungswert der Länge für das Szenario einer Halbebene untersucht wird.

Literatur

- [1] S. R. Finch. Optimal escape paths. Technical report, Clay Mathematics Institute, 2005.
- [2] S. R. Finch and J. A. Shonder. Lost at sea. Technical report, Clay Mathematics Institute, 2004.
- [3] V. A. Zalgaller. Extremal problems concerning the convex hull of a space curve. *Algebra i Analiz*, 8:1–13, 1997.
- [4] V. A. Zalgaller. A discussion about a question of bellman. *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov*, 299:54–86, 2004.