

RHEINISCHE FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT BONN
INSTITUT FÜR INFORMATIK I



Horst Steuer

**Dichtheit von iterierten
Segmentschnitten**

21. April 2007

Seminararbeit im WS 2006/2007

Zusammenfassung

Gegeben eine endliche Menge S_1 an Punkten in der Ebene, definieren wir die Punktmenge S_i wie folgt: Wenn S_i bereits bestimmt wurde, ermittle eine Menge L_i , welche sämtliche Liniensegmente enthält, die alle bisher ermittelten Punkte $\bigcup_{j=1}^i S_j$ untereinander verbindet. Dann sei S_{i+1} die Menge aller Schnittpunkte der Liniensegmente in L_i , welche sich zwar schneiden, aber nicht überlappen. Wir zeigen dann, dass die Menge $\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$ dicht in einer bestimmten, nichtleeren Teilmenge der Ebene ist. Diese Region ist der Schnitt aller geschlossenen Halbebenen, welche alle Punkte aus S_1 bis auf einen enthalten.

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Einführung | 2 |
| 2 | Ausnahmekonfigurationen | 4 |
| 3 | Der Kandidat | 6 |
| 4 | Ein nützlicher Spezialfall | 8 |
| 5 | Dichtheit in einem Dreieck | 12 |
| 6 | Dichtheit im Kandidaten $K(S)$ | 18 |

1 Einführung

Sei eine endliche Menge $S = S_1$ von Punkten in der euklidischen Ebene gegeben. Dann ergibt sich eine Menge L_1 von Liniensegmenten dadurch, dass wir alle möglichen Punktpaare aus S_1 verbinden. Definiere dann S_2 als die Menge aller Schnittpunkte der Liniensegmente in L_1 welche sich nicht überlappen. Wir definieren die Mengen an Liniensegmenten L_i und Punktmenge S_i induktiv wie folgt:

$$L_i := \left\{ pq \mid p, q \in \bigcup_{j=1}^i S_j \wedge p \neq q \right\}$$

$$S_{i+1} := \{x \mid \{x\} = l \cap l' \text{ mit } l, l' \in L_i\}$$

Desweiteren sei $S_\infty := \bigcup_{i=1}^\infty S_i$ die Menge aller so entstehenden Schnittpunkte.

Diese Ausarbeitung beschäftigt sich mit der Frage, in welcher Region $K(S)$ die Schnittpunkte aus S_∞ dicht sind und in welchen Ausnahmefällen diese Punkte in keiner Menge mit nichtleerem Inneren, also beispielweise nicht auf einer Geraden oder einem Punkt, dicht sind. Dicht bedeutet für zwei Teilmengen A und B des \mathbb{R}^2 mit $A \subseteq B$, dass für jeden Punkt $b \in B$ jede Epsilon-Scheibe um diesen Punkt b mindestens einen Punkt aus A enthält.

Motiviert wird dieses Problem durch ein anderes: Und zwar das Problem des Einbettens einer endlichen Punktmenge in einen planaren Graphen mit minimaler Dilation, wie es von Ebbers-Baumann et al. [1] formuliert wurde. Hierfür wird die *Knoten-zu-Knoten Dilation* in einem ungerichteten Graphen G wie folgt definiert:

$$\delta_G(p, q) := \frac{|\pi(p, q)|}{|pq|}$$

wobei p und q Knoten in G sind, $\pi(p, q)$ ein kürzester p - q -Pfad in G und $|pq|$ die euklidische Distanz von q zu p ist. Damit beschreibt die *Knoten-zu-Knoten Dilation* das Verhältnis der Länge eines kürzesten p - q -Weges in G zu einer direkten Verbindung dieser beiden Punkte. Die Dilation von G ist gegeben durch

$$\delta(G) := \sup_{p, q \text{ Knoten von } G, p \neq q} \delta_G(p, q)$$

Zu einer gegebenen Punktmenge S , welche in einer Ebene liegt, ist die *Dilation von S* gegeben durch

$$\Delta(S) := \inf \{ \delta(G) \mid G = (V, E) \text{ planarer Graph, } S \subseteq V \text{ und } V \setminus S \text{ endlich} \}$$

Selbst für eine einfache Konfiguration, wie zum Beispiel fünf gleichmäßig auf einem Kreis verteilte Punkte, ist es schwer $\Delta(S)$ zu finden. Ebbers-Baumann

et al. [1] konnten zeigen, dass für jede Punktmenge $S \subset \mathbb{R}^2$ $\Delta(S) \leq 1.1247$ gilt.

Eine naive Idee, eine Punktmenge S in einem Graphen mit minimaler Dilation einzubetten, besteht darin, einen Graphen $G = (V, E)$, $S \subseteq V$ zu finden, so dass $\delta_G(p, q) = 1$ für alle $p, q \in V, p \neq q$ gilt. Angenommen wir haben einen solchen Graphen G gefunden, dann muss für jedes Punktepaar $p, q \in S$ das Liniensegment pq Teil des Graphen sein. Da G ein planarer Graph ist, müssen die Schnittpunkte dieser Liniensegmente ebenfalls in V sein. Durch diese Schnittpunkte ergeben sich neue Liniensegmente, die wieder auf neue Schnittpunkte führen können. Falls dieser iterative Vorgang eine endliche Menge an Schnittpunkten ergibt, dann gilt $|S_\infty| < \infty$ und für den Graphen $G = (V, E)$ mit $S \subseteq V$ gilt $|V \setminus S| < \infty$ und $\delta(G) = 1$ und somit $\Delta(S) = 1$. Folglich kann $|S_\infty| < \infty$ nur dann gelten, wenn S eine Teilmenge der Knoten eines dilationsfreien Graphen ist, also $\delta(G) = 1$ gilt. Diese Punktmenge werden *Ausnahmekonfigurationen* genannt und im nächsten Abschnitt betrachtet. Dies müssen aber nicht die einzigen Konfigurationen sein, für welche $\Delta(S) = 1$ gilt. Es könnte auch eine Sequenz geometrischer Graphen geben, deren Dilation zwar nicht 1 ist, aber gegen 1 konvergiert. Das Hauptresultat der Arbeit von Grüne und Sarvestani [3] zeigt, dass S_∞ in allen Fällen, in denen S keine Ausnahmekonfiguration ist, dicht in einer nichtleeren Region $K(S)$ ist. $K(S)$ ist der Schnitt aller geschlossenen Halbebenen, welche alle außer einem Punkt von S enthalten und wird im nächsten Abschnitt formal definiert.

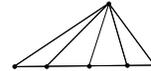
2 Ausnahmekonfigurationen

In diesem Kapitel folgt eine Auflistung aller Fälle von Dilatations-freien Graphen[2]. Die Ausnahmekonfigurationen sind eine Teilmenge der Knotenmenge solcher dilatationsfreien Graphen. Sei P der Weg mit den meistens Knoten, die auf einer Geraden liegen. Für einen Graphen mit fünf oder mehr Knoten muss es einen solchen Weg P mit zwei oder mehr Kanten geben, denn es gibt keine Möglichkeit den K_5 in die Ebene einzubetten¹. Es gibt folgende vier Fälle mit einer beliebigen Anzahl an Knoten:

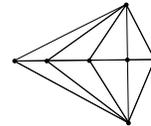
(i) Alle Knoten liegen auf P .



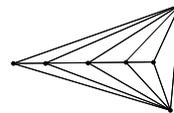
(ii) Ein Knoten liegt nicht auf P .



(iii) Zwei Knoten liegen auf gegenüberliegenden Seiten von P , und der gerade Pfad zwischen diesen beiden Knoten läuft über einen Knoten, welcher auf P liegt.

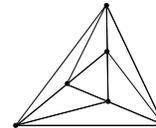


(iv) Zwei Knoten liegen auf gegenüberliegenden Seiten von P , und der gerade Pfad zwischen diesen beiden Knoten kreuzt P nicht.



Es gibt einen weiteren Spezialfall mit 6 Knoten:

(v) Ein Dreieck liegt vollständig innerhalb eines anderen Dreiecks, wobei jedes Paar von Punkten des inneren Dreiecks kollinear mit einem Punkt des äußeren Dreiecks ist.



¹Der K_5 ist der Graph, welcher aus fünf Knoten besteht, die jeweils mit allen vier anderen Knoten verbunden sind. Für den Beweis, dass der K_5 nicht planar ist siehe [4]

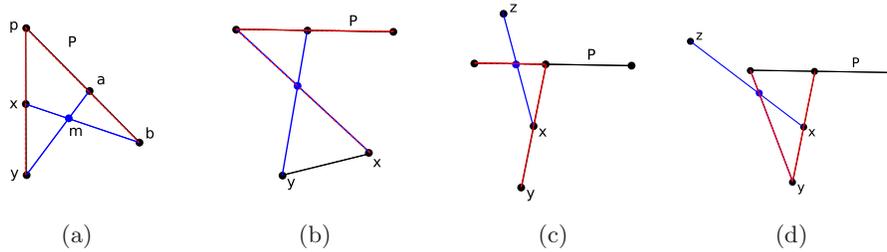


Abbildung 1: Nicht-dilationsfreie Graphen, schwarz: Ausgangssituation, blau: interessante Liniensegmente + Schnittpunkte, rot: V-Form

Lemma 1 *Diese fünf Fälle sind die einzigen möglichen Dilatationsfreien-Graphen.*

Beweis. Der Beweis läuft über eine Fallunterscheidung. Sei G also ein Graph mit einem geraden Weg P mit den meisten Kanten, wie oben beschrieben. Falls es höchstens einen Punkt auf jeder Seite von P gibt, dann gehört G , wie man leicht erkennen kann zu einem der ersten vier Fälle. Andernfalls gibt es mindestens zwei Punkte x und y welche auf der selben Seite von P liegen und es lassen sich folgende Fälle unterscheiden:

1. Falls die Gerade xy durch einen Endknoten p von P läuft, dann lässt sich eine Teilmenge mit fünf Knoten bilden (die x, y , den Endknoten auf P sowie zwei weitere Knoten, nennen wir sie a und b , auf P enthält), die eine V-Form bilden. Dabei bildet der Endknoten p von P die Spitze des Vs und die Knoten a, b, p sind kollinear, und auch p, x, y sind kollinear. O.B.d.A. seien x und a die auf den beiden Geraden näher an p liegenden Punkte. Dann entsteht durch den Schnitt der Liniensegmente xb und ya ein Punkt m . Dieser bildet mit den Punkten a, b, p, x wieder eine V-Form, wobei diesmal b die Spitze bildet und jeweils p, a und b als auch x, m und b kollinear sind (siehe Abbildung 1a). Die konvexe Hülle dieser fünf Punkte ist kleiner als die der ersten gewählten fünf Punkte. Da man diese Konstruktion iterativ anwenden kann, verkleinert sich somit die V-Form mit jeder Iteration und es entstehen unendlich viele neue Schnittpunkte.
2. Sollte das Segment xy P nicht schneiden, so ergibt sich durch den Schnitt der Liniensegmente von vier Knoten eine V-Form wie eben, mit den selben Konsequenzen (siehe Abbildung 1b).
3. Es bleibt also nur noch der Fall übrig, dass P nur aus drei Punkten besteht und die Gerade xy den Punkt P genau in ihrem mittleren Punkt schneidet, der Graph also die Form eine Ts hat. Würde P nämlich aus mehr als drei Punkten bestehen, ließe sich einer der ersten beiden Fälle

anwenden. Auch wenn weitere Punkte auf der xy -Seite von P liegen, welche nicht kollinear mit dem mittleren Punkt von P und x und y sind, lässt sich einer der ersten beiden Fälle anwenden. Liegen mehr als die beiden Punkte x und y mit dem mittleren Punkt von P auf einer Geraden, so ist dies ein Widerspruch zur Definition von P , da es damit einen Weg mit mehr Punkten auf einer Geraden gibt. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei angenommen, dass x näher an P liege als y . Dieser Fall gehört zu den Ausnahmekonfigurationen, es sei denn, es befindet sich mindestens ein weiterer Punkt z auf der gegenüberliegenden Seite von P . Damit betrachten wir also eine Menge von genau sechs Punkten. Dort gibt es wieder eine Fallunterscheidung:

- (a) Die Gerade xz schneidet P , dann ergibt sich durch diesen Schnittpunkt wieder eine V-Form (siehe Abbildung 1c).
- (b) x , z und ein Endpunkt von P liegen auf einer Geraden, dann ergibt sich die Ausnahmekonfiguration (v)
- (c) Weder (a) noch (b) treffen zu, dann schneidet xz ein von y und einem Endpunkt von P aufgespanntes Liniensegment, so dass wieder ein V entsteht (siehe Abbildung 1d).

□

3 Der Kandidat

In diesem Abschnitt wird die Region $K(S)$ formal definiert, in welcher die Menge S_∞ dicht ist. Bis wir diesen Zusammenhang bewiesen haben, nennen wir $K(S)$ den *Kandidaten*.

Definition 2 Der Kandidat $K(S)$ wird definiert als der Schnitt aller geschlossenen Halbebenen, welche alle Punkte aus S_1 bis auf einen enthalten:

$$K(S) := \bigcap_{p \in S_1} \bigcap_{H \supset S \setminus \{p\}} H$$

Im folgenden Lemma zeigen wir einige grundlegende Eigenschaften von $K(S)$. Die wichtigste ist, dass es keine Schnittpunkte außerhalb von $K(S)$ geben kann.

Lemma 3

1. Falls der Kandidat $K(S)$ nicht leer ist, ist er ein konvexes Polygon.
2. Jede Ecke von $K(S)$ gehört zu $S_1 \cup S_2$.
3. Jeder Schnittpunkt liegt innerhalb von $K(S)$, d.h. $S_\infty \setminus S \subset K(S)$.

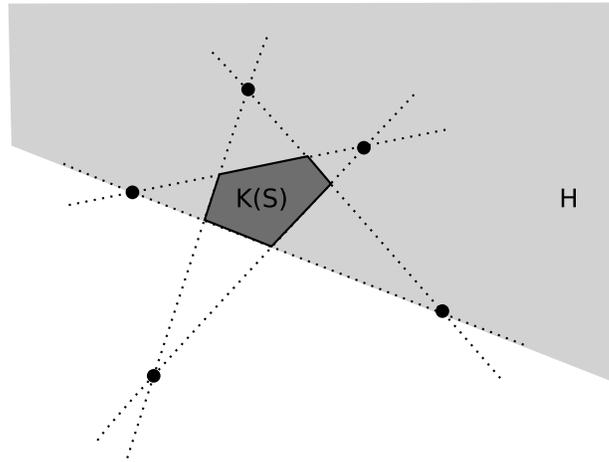


Abbildung 2: Der Kandidat $K(S)$ und eine geschlossene Halbebene H , welche alle außer einen Punkt enthält

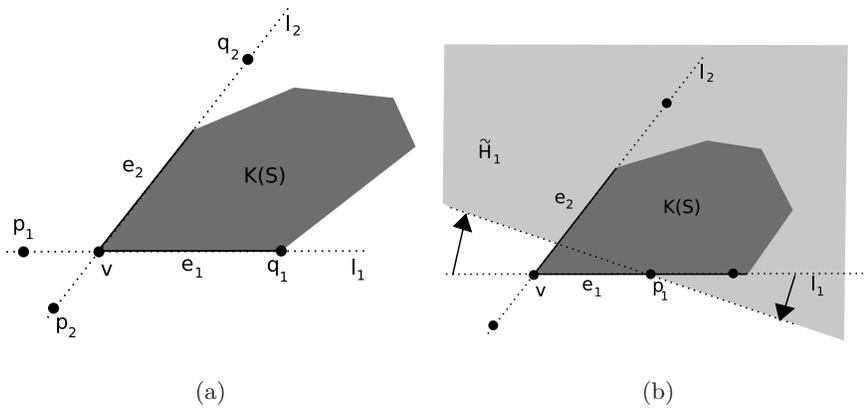


Abbildung 3: Jeder Eckpunkt von $K(S)$ muss ein Element von $S_1 \cup S_2$ sein.

Beweis. 1. Die Konvexität folgt direkt aus der Definition, da $K(S)$ ein Schnitt von konvexen Mengen ist. Betrachtet man die Definition, so erkennt man, dass es ausreicht, für jeden Punkt $p \in S$ nur die Halbebenen zu betrachten, welche mindestens zwei Punkte aus S auf ihrer Begrenzung liegen haben. Da S eine endliche Menge ist, folgt daraus, dass die Anzahl der zu schneidenden Halbebenen endlich ist, und somit ist $K(S)$ ein Polygon.

2. Zur Veranschaulichung betrachte Abbildung 3. Seien e_1 und e_2 zwei benachbarte Kanten des Polygons $K(S)$ welche sich im Knoten v treffen. Desweiteren seien l_1 und l_2 die Geraden durch diese Kanten. Der Argumentation aus dem ersten Teil folgend liegen auf jeder der beiden Geraden mindestens zwei Punkte von S_1 . Falls zwei Punkte $p_1, q_1 \in S_1$ auf l_1 auf gegenüberliegenden Seiten von v liegen und äquivalent zwei Punkte $p_2, q_2 \in S_1$ auf l_2 auf gegenüberliegenden Seiten von v liegen, wie in Abbildung 3a gezeigt, so gehört der Knoten v zu S_2 , da es der Schnittpunkt von p_1q_1 und p_2q_2 ist.

Andernfalls haben wir die Situation, welche in Abbildung 3b gezeigt ist, dass bei einer Kante, nehmen wir an es ist e_1 , alle Punkte $S \cap l_1$ auf einer Seite von v liegen. Sei p_1 der Punkt aus $S \cap l_1$, welcher am nächsten zu v liegt. Angenommen v gehört nicht zu S_1 , dann können wir die Halbebene H_1 , welche zur Kante e_1 gehört, so um p_1 drehen, dass die gedrehte Halbebene \tilde{H}_1 immer noch alle Punkte aus S_1 bis auf einen enthält, aber nicht mehr $v \in K(S)$. Dies ist ein Widerspruch zur Definition von $K(S)$, denn $K(S)$ muss innerhalb von \tilde{H}_1 liegen.

3. Sei H eine geschlossene Halbebene welche alle Punkte aus S enthält bis auf p . Dann müssen alle Schnittpunkte der nächsten Generation $S_2 \setminus S_1$ in H liegen, da alle Liniensegmente l_2 , die aus den Punkten $S_1 \setminus p$ entstehen, vollständig innerhalb von H liegen, und damit auch ihre Schnittpunkte innerhalb von H liegen. Die übrigen Liniensegmente aus l_2 treffen sich alle im Punkt p und haben daher untereinander keine Schnittpunkt. Sie können sich aber mit den Liniensegmenten aus der ersten Gruppe schneiden, da diese, wie bereits erwähnt, vollständig innerhalb von H liegen, müssen auch die Schnittpunkte mit diesen Liniensegmenten in H liegen. Induktiv ergibt sich $S_\infty \setminus S \subset H$. Da dies für jede beliebige der so definierten Halbebenen gilt, folgt daraus die Annahme, dass jeder Schnittpunkt innerhalb des Kandidaten liegt.

□

4 Ein nützlicher Spezialfall

In diesem Abschnitt betrachten wir die Startkonfiguration aus Abbildung 4. Wir gehen also von einer Startkonfiguration $S = \{A, B, C, D, E, F\}$ aus, wobei die Punkte A, B, C ein Dreieck bilden und die übrigen Punkte D, E, F jeweils die Mittelpunkte der Strecken AB , BC bzw. AC sind. Wir wollen

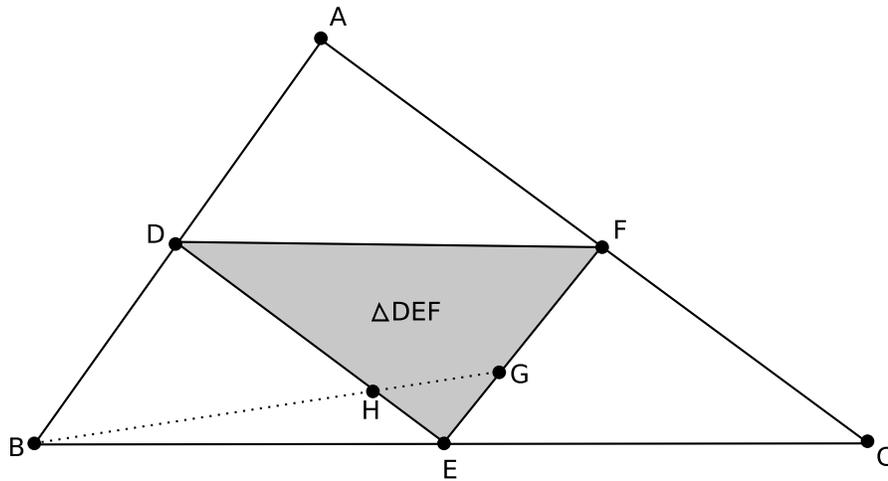


Abbildung 4: Ein nützlicher Spezialfall

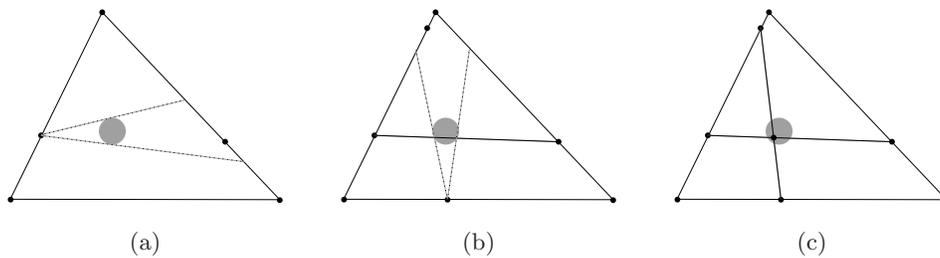


Abbildung 5: Konstruktion aus Lemma 4

zeigen, dass für eine solche Startkonfiguration die Menge der Schnittpunkte S_∞ dicht im Dreieck $\triangle DEF$ ist. Um dies zu beweisen, reicht es aus zu zeigen, dass S_∞ dicht auf den Seiten des Dreiecks ist, wie durch folgendes Lemma gezeigt wird:

Lemma 4 *Ist S_∞ dicht auf den Seiten eines Dreiecks, so sind die Schnittpunkte der Liniensegmente, welche die Punkte auf den Seiten des Dreiecks verbinden, dicht im Innerern des Dreiecks.*

Beweis. Betrachte eine beliebige Epsilon-Scheibe für einen beliebigen Punkt innerhalb des Dreiecks. Wähle nun einen beliebigen Punkt aus S_∞ , welcher auf dem Rand des Dreiecks liegt. Betrachtet man nun das Intervall, welches durch die Tangenten von diesem Punkt an die Epsilon-Scheibe auf dem gegenüberliegenden Rand aufgespannt wird, so muss dort ein Punkt aus S_∞ liegen, da die Menge dicht auf dem Rand ist (Abbildung 5a). Verbindet man

die beiden Punkte auf dem Rand, so erhält man ein Liniensegment, welches durch die gewählte Epsilon-Scheibe geht. Wählt man nun wieder einen geeigneten Punkt auf dem Rand und führt die Tangentenkonstruktion an dem Liniensegmentabschnitt, welcher innerhalb der Epsilon-Scheibe liegt, durch, so erhält man wieder ein Intervall auf dem Rand, in dem ein Punkt von S_∞ liegen muss (Abbildung 5b). Damit erhält man ein zweites Liniensegment, welches das erste innerhalb der Epsilon-Scheibe schneidet (Abbildung 5c). Da man dies für jede beliebige Epsilon-Scheibe und jeden beliebigen Punkt aus dem Inneren des Dreiecks durchführen kann, ist damit gezeigt, dass S_∞ dicht ist im Inneren des Dreiecks. \square

Wir können uns sogar für den Beweis auf eine gewisse Teilmenge $\tilde{S}_\infty \subseteq S_\infty$ beschränken, welche wir im Folgenden definieren. Bezeichne $\mathcal{T} := DE \cup EF \cup DF$ den Rand des Dreiecks $\triangle DEF$. In jedem Schritt der Iteration betrachten wir nun nur noch Liniensegmente, welche Punkte auf \mathcal{T} mit einem Knoten aus $\{A, B, C\}$ verbinden und die Schnittpunkte solcher Segmente mit \mathcal{T} :

Definition 5

$$\begin{aligned}\tilde{S}_0 &:= \{D, E, F\} \\ \forall i \in \mathbb{N}_0 : \tilde{L}_i &:= \{pq \mid p \in \tilde{S}_i, q \in \{A, B, C\}\} \\ \tilde{S}_{i+1} &:= \{x \mid x \in l \cap \mathcal{T} \text{ mit } l \in \tilde{L}_i\} \\ \tilde{S}_\infty &:= \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{S}_i\end{aligned}$$

Desweiteren nennen wir den Bruch $\frac{k}{l} \in [0, 1]$, $k, l \in \mathbb{N}_0$, $ggT(k, l) = 1$ *konstruierbare Zahl*, falls es einen Punkt $M \in \tilde{S}_\infty$ auf DE gibt, so dass $\frac{|EM|}{|DE|} = \frac{k}{l}$ gilt.

Die folgende in Abbildung 4 abgebildete Beobachtung enthält den Hauptschritt, wie man eine neue konstruierbare Zahl von einer alten ableiten kann.

Lemma 6 *Sei G ein Punkt auf dem Segment EF , so dass $\frac{|EG|}{|EF|} = \frac{k}{l}$, $k, l \in \mathbb{N}_0$. Außerdem sei H der Schnitt von BG und DE . Dann gilt: $\frac{|EH|}{|DE|} = \frac{k}{k+l}$.*

Beweis. In unserem Spezialfall sind die Liniensegmente BD und EF parallel zueinander, daraus folgt, dass die Dreiecke $\triangle EGH$ und $\triangle DBH$ ähnlich sind.

$$\frac{|DH|}{|EH|} = \frac{|BD|}{|EG|} = \frac{|EF|}{|EG|} = \frac{l}{k} \tag{1}$$

Die zweite Gleichheit gilt, da $DBEF$ ein Parallelogramm ist ($|BD| = |EF|$). Es folgt also:

$$\frac{|DE|}{|EH|} = \frac{|DH| + |HE|}{|EH|} \stackrel{(1)}{=} \frac{l}{k} + 1 = \frac{l+k}{k}$$

□

Wenn wir statt D und E ein anderes Eckenpaar des Dreiecks $\triangle DEF$ verwenden, erhalten wir die selben konstruierbaren Zahlen. Außerdem haben wir eine einfache Methode, diese Zahlen herzuleiten. Zusammengefasst bedeutet dies:

Lemma 7

1. Seien $P, Q \in \{D, E, F\}$ beliebige, unterschiedliche Eckpunkte des Dreiecks $\triangle DEF$, dann ist $\frac{k}{l}$ genau dann konstruierbar, wenn es einen Punkt $M \in \tilde{S}_\infty$ auf PQ gibt, so dass $\frac{|PM|}{|PQ|} = \frac{k}{l}$ gilt.
2. Die Zahl $\frac{k}{l}$ ist genau dann konstruierbar, wenn $1 - \frac{k}{l}$ konstruierbar ist.
3. Falls $\frac{k}{l}$ konstruierbar ist, dann ist auch $\frac{k}{k+l}$ konstruierbar.

Beweis.

1. Dies wird dadurch impliziert, dass man Lemma 6 auf andere Seiten des Dreiecks $\triangle DEF$ anwenden könnte. Formal können wir durch eine Induktion über i beweisen, dass für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ und jedes $\frac{k}{l} \in [0, 1], k, l \in \mathbb{N}_0, ggT(k, l) = 1$, die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (a) Es gibt einen Punkt $M \in \tilde{S}_i$ auf DE mit $\frac{|EM|}{|DE|} = \frac{k}{l}$
- (b) Für jedes Paar Eckpunkte $P, Q \in \{D, E, F\}, P \neq Q$ existiert ein Punkt $M \in \tilde{S}_i$ auf PQ für den gilt $\frac{|PM|}{|PQ|} = \frac{k}{l}$

Induktionsanfang $i = 0$: Trivial, denn (a) und (b) sind beide äquivalent zu $\frac{k}{l} \in \{0, 1\}$. Auch die Implikation (b) \Rightarrow (a) im Induktionsschritt ist trivial. Der Rest folgt aus der angesprochenen Symmetrie der Argumentation von Lemma 6.

2. Folgt aus der ersten Aussage. Wähle $P := D$ und $Q := E$, dann gibt es einen Punkt $M \in \tilde{S}_\infty$ auf DE , für den gilt: $\frac{|DM|}{|DE|} = \frac{k}{l} \Leftrightarrow |DM| = |DE| \frac{k}{l}$. Also gilt auch

$$\begin{aligned} |EM| &= |DE| - |DM| = |DE| - |DE| \frac{k}{l} = |DE| \left(1 - \frac{k}{l}\right) \\ &\Leftrightarrow \frac{|EM|}{|DE|} = \left(1 - \frac{k}{l}\right) \end{aligned}$$

3. Sei $\frac{k}{l}$ eine konstruierbare Zahl. Wählen wir nun $P := E$ und $Q := F$ dann gibt es einen Punkt $M \in \tilde{S}_\infty$ auf EF , so dass $\frac{|EM|}{|EF|} = \frac{k}{l}$ gilt. Wir definieren $G := M$ und wenden Lemma 6 an. Der Punkt $H := BG \cap DE$ gehört also zu \tilde{S}_∞ und genügt der Gleichung $\frac{|EH|}{|DE|} = \frac{k}{k+l}$. Also ist $\frac{k}{k+l}$ konstruierbar.

□

Kommen wir nun zum zentralen Ergebnis dieses Abschnitts:

Lemma 8 Sei die Startkonfiguration $S = \{A, B, C, D, E, F\}$ gegeben wie am Anfang dieses Abschnitts. Dann ist S_∞ dicht in $K(S) = \triangle DEF$.

Beweis. Wir werden beweisen, dass jede Zahl in $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ konstruierbar ist. Dies ist natürlich eine dichte Menge in $[0, 1]$. Also ist \tilde{S}_∞ nach der Definition der konstruierbaren Zahlen und Lemma 7.1 dicht in \mathcal{T} . Also ist S_∞ dicht in \mathcal{T} und damit auch dicht in $\triangle DEF$.

Wir wollen also beweisen, dass jeder Bruch $\frac{k}{l} \in [0, 1]$, $k, l \in \mathbb{N}_0$, $ggT(k, l) = 1$, konstruierbar ist. Dazu verwenden wir eine Induktion über n , welche die Summe über Zähler und Nenner von $\frac{k}{l}$ ist.

Induktionsanfang: $n = 1$: wir haben also $k = 0$ und $l = 1$. Die Zahl 0 ist konstruierbar, dafür setze einfach $M = E$.

Induktionsschritt: Angenommen die Aussage gilt für alle Fälle mit $k+l \leq n$. Betrachte nun einen beliebigen Bruch $\frac{k}{l} \in (0, 1]$ mit $k+l = n+1$ und $ggT(k, l) = 1$.

1. Fall: $0 < \frac{k}{l} \leq \frac{1}{2}$: Definiere $k' := k$ und $l' := l - k$. Wir haben also $k', l' \in \mathbb{N}_0$, $ggT(k', l') = 1$, $\frac{k'}{l'} \in (0, 1]$ und $0 \leq k' + l' < k + l = n + 1 \Rightarrow k' + l' \leq n$. Nach Induktionsannahme ist also $\frac{k'}{l'}$ konstruierbar. Nach Lemma 7.3 ist auch $\frac{k'}{k'+l'} = \frac{k}{l}$ konstruierbar.

2. Fall: $\frac{1}{2} < \frac{k}{l} \leq 1$: Wir definieren $k' := l - k$ und $l' := l$. Damit haben wir $k', l' \in \mathbb{N}_0$, $ggT(k', l') = 1$, $\frac{k'}{l'} \in [0, 1)$ und $k' + l' < k + l = n + 1 \Rightarrow k' + l' \leq n$. Damit ist nach Induktionsannahme $\frac{k'}{l'}$ konstruierbar. Nach Lemma 7.2 ist auch $1 - \frac{k'}{l'} = \frac{k}{l}$ konstruierbar.

□

5 Dichtheit in einem Dreieck

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass immer dann, wenn S keine Ausnahmekonfiguration ist, die Schnittpunkte S_∞ dicht in einem Dreieck sind. Zunächst wird mit einem Spezialfall begonnen.

Lemma 9 Sei eine Startkonfiguration $S = \{A, B, C, D, E\}$ wie in Abbildung 6 gegeben. Die drei Punkte A, B, C sind nicht kollinear. Der Punkt D liegt auf dem Segment AB , E liegt auf AC . Dann ist S_∞ dicht in einem Dreieck.

Beweis. Für den Beweis benutzen wir die Projektion in Abbildung 7. Die gegebene, zwei-dimensionale geometrische Situation, welche oben beschrieben wurde, liegt in einer affinen Ebene \mathcal{A} des \mathbb{R}^3 , welche den Ursprung O nicht enthält. Desweiteren betrachten wir eine affine Ebene \mathcal{A}' , welche parallel zu OB und OC liegt und A enthält. Wir können nun eine Projektion $\pi : \triangle ABC \setminus BC \rightarrow \mathcal{A}'$ definieren, welche jeden Punkt $P \in \triangle ABC \setminus BC$ auf

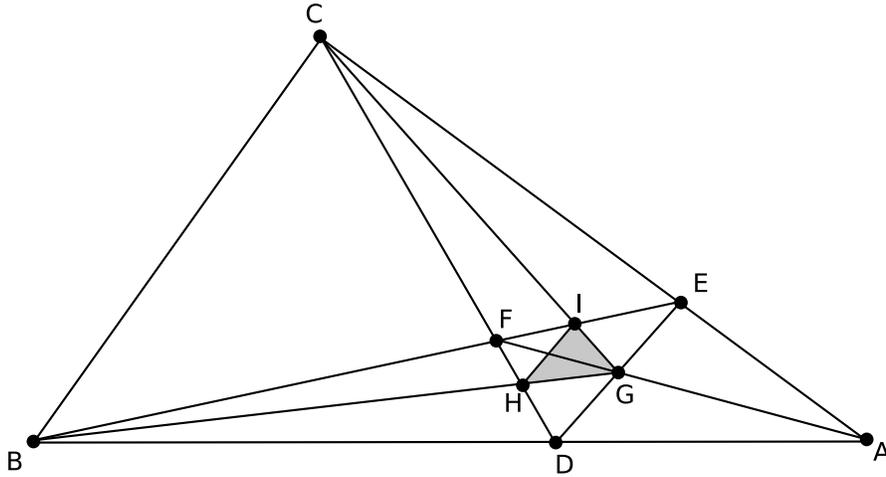


Abbildung 6: S_∞ ist dicht in ΔGHI

den Punkt in \mathcal{A}' projiziert, welcher von der Gerade OP getroffen wird. Für jeden Punkt P bezeichnen wir die Projektion $\pi(P)$ mit P' .

Grundlegende Argumente aus der projektiven Geometrie zeigen, dass die Projektion π ein Homöomorphismus zwischen $\Delta ABC \setminus BC$ und $\pi(\Delta ABC \setminus BC)$ ist, also bijektiv und stetig ist, sowie eine stetige Umkehrabbildung besitzt. Desweiteren bildet π Liniensegmente auf Liniensegmente ab. Außerdem sind die Projektionen zweier Liniensegmente, die sich in B treffen, parallel in \mathcal{A}' , analoges gilt für zwei Liniensegmente, die sich in C treffen.

Da sich die Liniensegmente AD und EF in B schneiden, haben wir in \mathcal{A}' die Parallelität von $A'D'$ und $E'F'$, sowie die Parallelität von $A'E'$ und $D'F'$ da sich die beiden korrespondierenden Geraden in C schneiden. Demnach ist G' der Mittelpunkt von $D'E'$, I' ist der Mittelpunkt von $D'F'$ und H' ist der Mittelpunkt von $E'F'$. Wendet man nun Lemma 8 auf die Startkonfiguration $S' := \{D', E', F', G', H', I'\}$ an, so erhält man die Aussage, dass die Schnittpunkte S'_∞ dicht sind in $\Delta G'H'I'$. Da π ein Homöomorphismus ist, ist auch S_∞ dicht in im Dreieck ΔGHI . \square

Korollar 10 Sei S eine Startkonfiguration mit $n > 4$ Punkten in der Ebene in konvexer Lage, d.h. dass mehr als vier Punkte auf dem Rand der konvexen Hülle der Startkonfiguration liegen. Desweiteren dürfen keine drei Punkte kollinear sein. Dann ist S_∞ dicht in einem Dreieck.

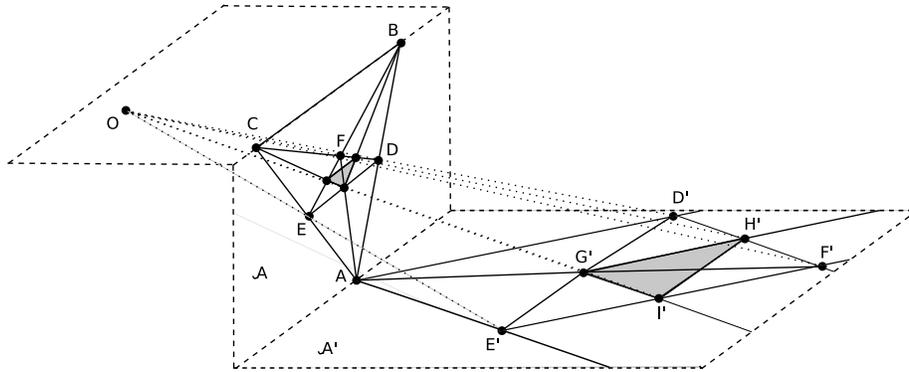


Abbildung 7: Eine hilfreiche Projektion des Dreiecks $\triangle ABC$.

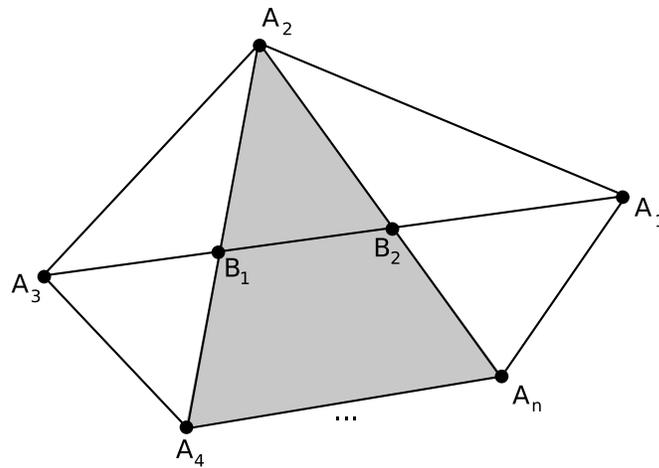


Abbildung 8: S_∞ ist dicht in einem Dreieck, falls $S = \{A_1, \dots, A_n\}$ mehr als vier Punkte enthält, welche in konvexen Positionen angeordnet sind.

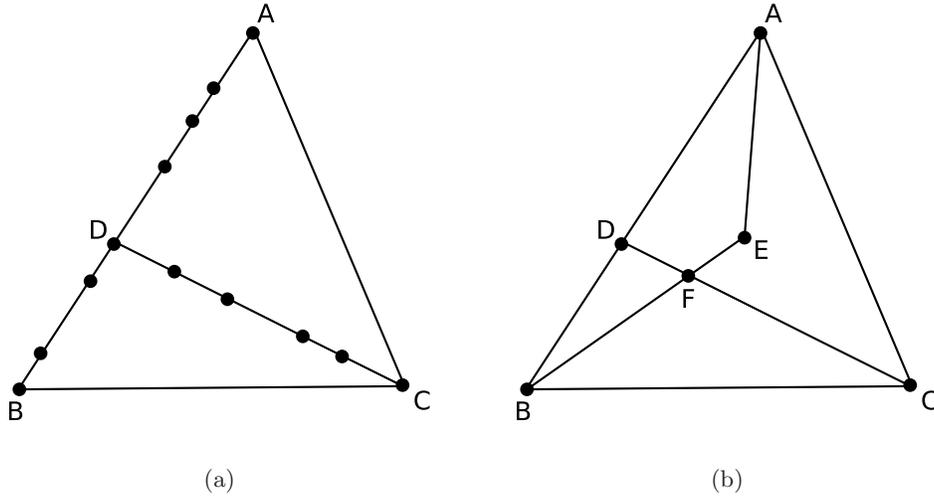


Abbildung 9: 2. Fall: Die konvexe Hülle von S besteht aus drei Punkten, und ein weiterer Punkt liegt auf einer der Seiten des Dreiecks

Beweis. Wir benennen die Startpunkte A_1, A_2, \dots, A_n gegen den Uhrzeigersinn wie in Abbildung 8. Nun definieren wir $B_1 := A_1A_3 \cap A_2A_4$ und $B_2 := A_1A_3 \cap A_2A_n$. Dann können wir Lemma 9 auf das Dreieck $\Delta A_2A_4A_n$ mit B_1 und B_2 auf verschiedenen Seiten des Dreiecks anwenden. Also ist S_∞ dicht in einem Dreieck. \square

Lemma 11 *Für jede Konfiguration, die keine Ausnahmekonfiguration ist, existiert ein Dreieck, in welchem S_∞ dicht ist.*

Beweis. Falls die konvexe Hülle $ch(S_1)$ von S_1 mehr als vier Eckpunkte hat, ist die Behauptung wegen Korollar 10 erfüllt. Falls die konvexe Hülle genau drei Eckpunkte A, B und C hat, können folgende Fälle auftreten:

1. Fall: Es existieren zwei zusätzliche Startpunkte auf verschiedenen Seiten des Dreiecks ΔABC . Dann folgt die Behauptung direkt aus Lemma 9.
2. Fall: Es existiert ein Startpunkt D auf einer der Seiten von ΔABC . O.B.d.A. nehmen wir an, dass es AB ist. Da es sich um keine Ausnahmekonfiguration handelt, gibt es einen weiteren Punkt, aber keinen, der auf AC oder BC liegt. Falls alle anderen Startpunkt aus $S \setminus \{A, B, C, D\}$ entweder auf AB oder CD liegen, handelt es sich bei der Konfiguration um die Ausnahmekonfiguration (ii) oder (iii). Sonst tritt einer der folgenden Fälle, wie in Abbildung 9 auf:
 - (a) Alle zusätzlichen Punkte $S \setminus \{A, B, C, D\}$ liegen auf AB und CD , und auf beiden Liniensegmenten liegt mindestens ein zusätzlicher

Punkt. In diesem Fall können wir Lemma 9 auf mindestens eines der Dreiecke $\triangle ACD$ oder $\triangle BCD$ anwenden.

- (b) Es existiert mindestens ein zusätzlicher Punkt E im Inneren des Dreiecks $\triangle ABC$, welcher aber nicht auf CD liegt. In diesem Fall ist E entweder innerhalb des Dreiecks $\triangle ACD$ oder innerhalb von $\triangle BCD$. Demnach schneidet entweder das Liniensegment BE oder AE das Liniensegment CD in einem Punkt F . Nun können wir Lemma 9 auf das Dreieck $\triangle ABE$, mit D und F auf verschiedenen Seiten liegend, anwenden.

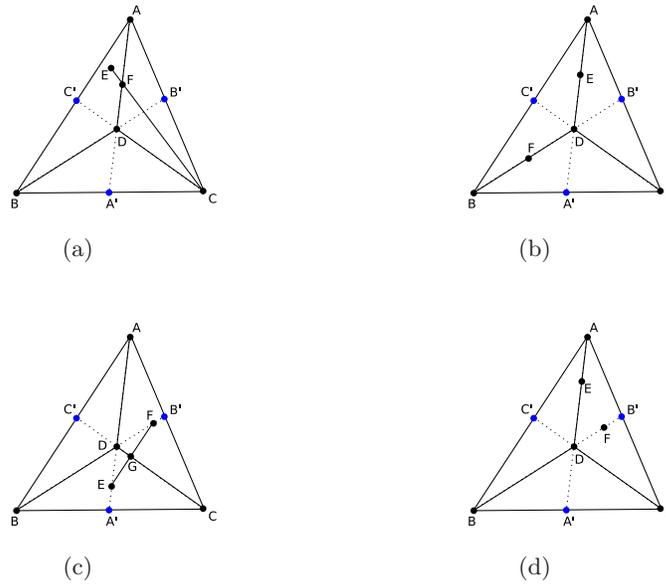


Abbildung 10: 3. Fall: Die konvexe Hülle von S besteht aus drei Punkten, und kein weiterer Punkt liegt auf den Seiten des Dreiecks

3. Fall: Es gibt keine zusätzlichen Punkte auf den Rändern von $\triangle ABC$. Es existiert also mindestens ein Punkt D im Inneren des Dreiecks $\triangle ABC$. Damit es sich nicht um eine Ausnahmekonfiguration handelt, muss es einen weiteren Punkt geben. Sei A' der Schnittpunkt von BC und der Gerade durch A und D . Definiere B' und C' analog. Diese drei Punkte sind übrigens nicht notwendigerweise Teil von S_∞ . Falls der Rest der Startpunkte entweder alle auf AA' oder auf BB' oder auf CC' liegen, erhalten wir die Ausnahmekonfiguration (iii). Ansonsten unterscheiden wir die folgenden vier Fälle, wie in Abbildung 10 gezeigt:

- (a) Es existiert ein Punkt E im Inneren von $\triangle ABC$, welcher nicht auf AA' , BB' oder CC' liegt. O.B.d.A. nehmen wir an, dass E im Inneren von $\triangle ABD$ liegt. Also schneidet CE entweder AD oder

BD in einem Punkt F ; wir nehmen an, dass F auf AD liegt. Die Punkte B , E und F können nicht kollinear sein, denn aufgrund der Konstruktion sind schon C , E und F kollinear, und weder E noch F liegen auf BC . Damit haben wir die selbe Situation wie im Fall 2.b: Das Dreieck $\triangle ABD$ hat den Punkt F auf einer Seite, und der Punkt E liegt im Inneren von $\triangle ABD$.

- (b) Mindestens zwei der Liniensegmente AD , BD und CD enthalten einen weiteren Punkt. Wenn wir annehmen, dass der Punkt E auf AD liegt, und der Punkt F auf BD , dann können wir Lemma 9 auf das Dreieck $\triangle ABD$ anwenden.
- (c) Auf mindestens zwei der Liniensegmente $A'D$, $B'D$ und $C'D$ liegt ein weiterer Punkt. Wir können annehmen, dass ein Punkt E auf $A'D$ liegt und ein Punkt F auf $B'D$. Dann liegt E im Inneren von $\triangle BCD$ und F im Inneren von $\triangle ACD$. Da $A'DB'C$ konvex ist, schneidet das Liniensegment EF das Liniensegment CD in einem Punkt G . Damit haben wir wieder den Fall 2.b für das Dreieck $\triangle ACD$, mit G auf einer Seite und F im Inneren. Falls A , F und G kollinear wären, müssten sie alle auf dem Liniensegment AA' liegen, denn E , F und G sind kollinear und A und E liegen auf AA' . Das ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass F im Inneren von $\triangle ACD$ liegt.
- (d) Eines der Liniensegmente AD , BD oder CD enthält einen zusätzlichen Punkt E , und eines der Liniensegmente $A'D$, $B'D$ oder $C'D$ enthält einen zusätzlichen Punkt F . Wir können annehmen, dass E auf AD liegt. Wenn wir jetzt nur zusätzliche Punkte auf $A'D$ hätten, wäre dies die Ausnahmekonfiguration (iii). Daher können wir annehmen, dass F auf $B'D$ liegt. Die anderen Fälle können analog abgehandelt werden. Alle Startpunkte aus $S \setminus \{A, B, C, D\}$ liegen entweder auf AD oder $B'D$, da wir sonst einen der Fälle 3.(a),(b) oder (c) hätten. Falls wir nur einen zusätzlichen Punkt E auf AD , und nur einen Punkt F auf $B'D$ haben, und C , E und F kollinear sind, dann haben wir die Ausnahmekonfiguration (iv). Andernfalls existiert ein Punkt E auf AD und ein Punkt F auf $B'D$, so dass C , E und F nicht kollinear sind. Dann haben wir den Fall 2.(b) für das Dreieck $\triangle ACD$.

Im übrig bleibenden Fall hat die konvexe Hülle vier Eckpunkte, nennen wir sie A, B, C und D gegen den Uhrzeigersinn. Sei O der Schnittpunkt von AC und BD . Falls alle zusätzlichen Punkte aus $S \setminus \{A, B, C, D\}$ auf AC oder alle Punkte auf BD liegen, haben wir die Ausnahmekonfiguration (iii). Andernfalls unterscheiden wir zwischen drei Fällen, welche in Abbildung 11 gezeigt sind.

1. Falls ein zusätzlicher Punkt E auf einer Seite des Vierecks $ABCD$

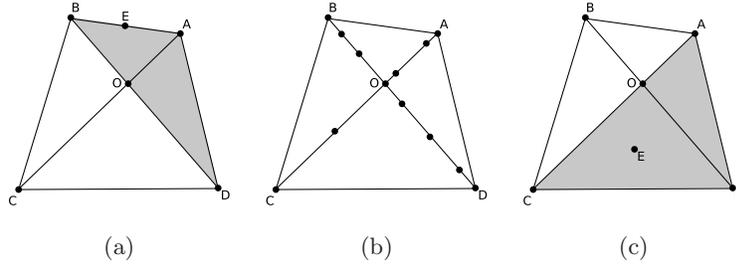


Abbildung 11: Fallunterscheidung, falls die konvexe Hülle von S vier Ecken hat.

liegt, wir nehmen an, es sei AB , können wir Lemma 9 auf das Dreieck $\triangle ABC$, mit E auf einer Seite und O auf einer anderen Seite, anwenden.

2. Falls alle restlichen Startpunkte auf AC und BD liegen, und auf beiden mindestens einer, dann können wir Lemma 9 auf mindestens eines der Dreiecke $\triangle ABO$, $\triangle ADO$, $\triangle BCO$ oder $\triangle CDO$ anwenden.
3. Falls ein Punkt E im Inneren des Vierecks, aber nicht auf AC oder BD liegt, dann liegt E in einem der Dreiecke $\triangle ABC$ oder $\triangle ACD$. Dies ist der Fall 2.b für das Dreieck welches den Punkt E enthält.

□

6 Dichtheit im Kandidaten $K(S)$

Wir haben bewiesen, dass die Schnittpunkte S_∞ dicht in einem Dreieck sind, falls S keine Ausnahmekonfiguration darstellt. Was zu zeigen bleibt, ist, dass sie dicht in $K(S)$ sind.

Lemma 12 *Seien L, M und N drei verschiedene Punkte, so dass M auf dem Liniensegment LN liegt, und seien a und b zwei von M ausgehende Strahlen auf der selben Seite von $\text{line}(L, N)$, wie in Abbildung 12 gezeigt. Sei P_0 ein Punkt auf dem Strahl a . Wir definieren nun eine Folge von Punkten induktiv wie folgt: $Q_i := P_i N \cap b$, $P_{i+1} := Q_i L \cap a$ für jedes $i \in \mathbb{N}_0$. Dann konvergiert die Punktfolge $(P_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ gegen M auf a und die Punktfolge $(Q_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert gegen M auf b .*

Beweis. Wir können dieses Ergebnis mit dem selben Trick beweisen wie Lemma 9. Wir benutzen die Projektion, welche in Abbildung 13 gezeigt wird. Die gegebene, zwei-dimensionale geometrische Situation ist in die affine Ebene \mathcal{A} des \mathbb{R}^3 , welche den Ursprung O nicht enthält, eingebettet.

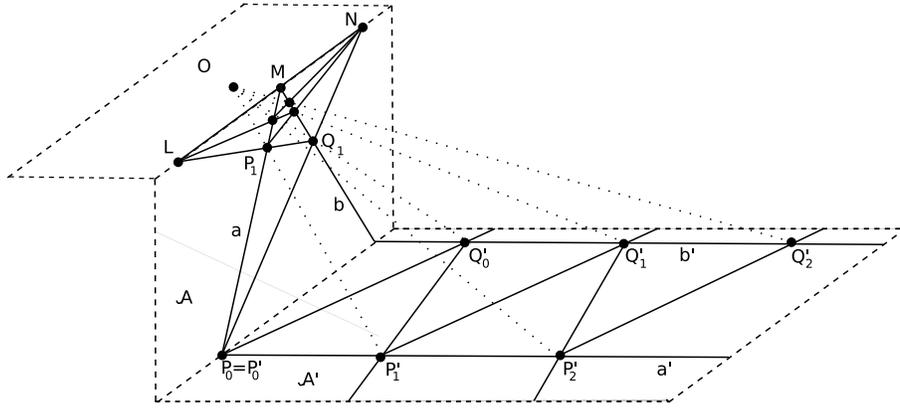


Abbildung 13: Beweis von Lemma 12 mittels Projektion.

Korollar 13 Seien L und N zwei Punkte, und diesmal sei M ein Punkt, welcher weder auf dem Segment LN noch kollinear mit L und N ist. Sei H_L die Halbebene welche von $\text{line}(L, M)$ begrenzt wird und N nicht enthält, genauso sei H_N die Halbebene welche von $\text{line}(M, N)$ begrenzt wird und L nicht enthält. Seien a und b zwei von M ausgehende Strahlen welche im Inneren von $H_L \cap H_N$ liegen. Wenn P_0 ein Punkt auf dem Strahl a ist und wir die Punktfolgen $(P_i)_{i \in \mathbf{N}_0}$ und $(Q_i)_{i \in \mathbf{N}_0}$ analog zu Lemma 12 definieren, dann konvergieren beide Folgen zu M .

Beweis. Betrachte Abbildung 14. Sei l eine zu $\text{line}(L, N)$ parallele Gerade durch M . Wir definieren dann $L' := l \cap P_0L$ und $N' := l \cap P_0N$. Da M auf dem Liniensegment $L'N'$ liegt, können wir Lemma 12 auf L', M, N', a, b und $P'_0 := P_0$ anwenden, um zwei Folgen $(P'_i)_{i \in \mathbf{N}_0}$ auf a und $(Q'_i)_{i \in \mathbf{N}_0}$ auf b zu konstruieren, welche gegen M konvergieren. Da offensichtlich $|P_iM| \leq |P'_iM| \searrow 0$ und $|Q_iM| \leq |Q'_iM| \searrow 0$ gilt, konvergieren auch $(P_i)_{i \in \mathbf{N}_0}$ und $(Q_i)_{i \in \mathbf{N}_0}$ zu M .

□

Das letzte Werkzeug, welches wir benötigen, ist das folgende einfache Lemma, dessen Situation in Abbildung 15 abgebildet ist, und das wir hier nicht beweisen:

Lemma 14 Sei ΔABC ein nicht-ausgeartetes Dreieck, das heißt, A, B und C sind nicht kollinear. Seien desweiteren D und E zwei Punkte in ΔABC , welche nicht kollinear mit C sind. Wenn wir nun jeden Punkt einer auf AB dichten Menge S mit C verbinden, dann sind die Schnittpunkte der resultierenden Liniensegmente mit DE dicht auf DE .

Bevor wir die Hauptaussage beweisen, führen wir eine nützliche Notation ein:

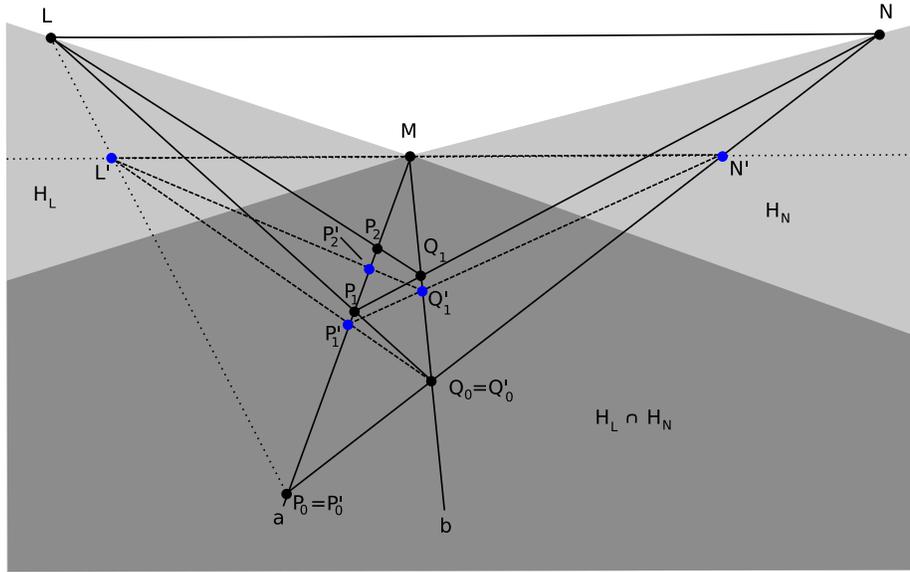


Abbildung 14: Auch diese Punktfolgen $(P_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ und $(Q_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ konvergieren gegen M .

Definition 15 Sei \mathcal{C} ein konvexes Polygon und sei P ein Punkt außerhalb von \mathcal{C} . Wir schreiben für jede Menge $S \subset \mathbb{R}^2$ $ch(S)$, um die konvexe Hülle von S zu bezeichnen. Wir definieren den *Sichtbarkeitskegel* von P in Bezug auf \mathcal{C} durch:

$$V(P, \mathcal{C}) := ch(\{P\} \cup \mathcal{C}) \setminus \mathcal{C}.$$

Wir nennen die beiden Kanten von $V(P, \mathcal{C})$, welche zu P adjazent sind, die *Tangenten* von \mathcal{C} durch P (siehe Abbildung 16).

Damit sind wir soweit vorbereitet, dass wir die Hauptaussage dieses Artikels beweisen können. Das folgende Lemma enthält das fehlende Argument.

Lemma 16 Sei die Startkonfiguration $S \subset \mathbb{R}^2$ eine beliebige endliche Punktmenge. Angenommen, S_∞ ist dicht in einem nichtleeren, konvexen Polygon $\mathcal{C} \subset ch(S)$. Sei desweiteren M ein Punkt aus S_∞ , so dass $M \notin \mathcal{C}$ und M kein Eckpunkt von $ch(S)$ ist. Dann ist S_∞ dicht in $ch(\{M\} \cup \mathcal{C})$.

Beweis. Seien A_1, \dots, A_n die Eckpunkte von $ch(S)$ gegen den Uhrzeigersinn. Wir unterscheiden dann die folgenden beiden Fälle, wie in Abbildung 17 zu sehen.

1. Fall: Falls der Punkt P innerhalb eines Sichtbarkeitskegels $V(A_i, \mathcal{C})$ liegt, gilt $V(M, \mathcal{C}) \subset V(A_i, \mathcal{C})$. Nach Lemma 14 ist S_∞ dicht auf beiden Tangenten von \mathcal{C} durch P . Dies, zusammen mit der Dichte in \mathcal{C} , impliziert, dass S_∞ dicht ist in $V(M, \mathcal{C})$ und damit auch dicht in $ch(\{M\} \cup \mathcal{C})$ ist.

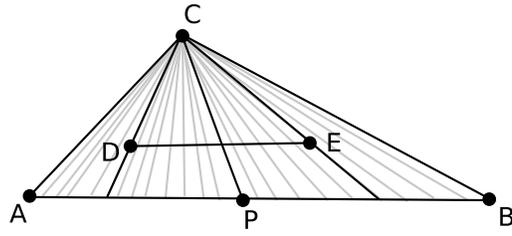


Abbildung 15: Wenn S dicht auf AB ist, so sind die Schnittpunkte $\{PC \cap DE \mid P \in S\}$ dicht auf D .

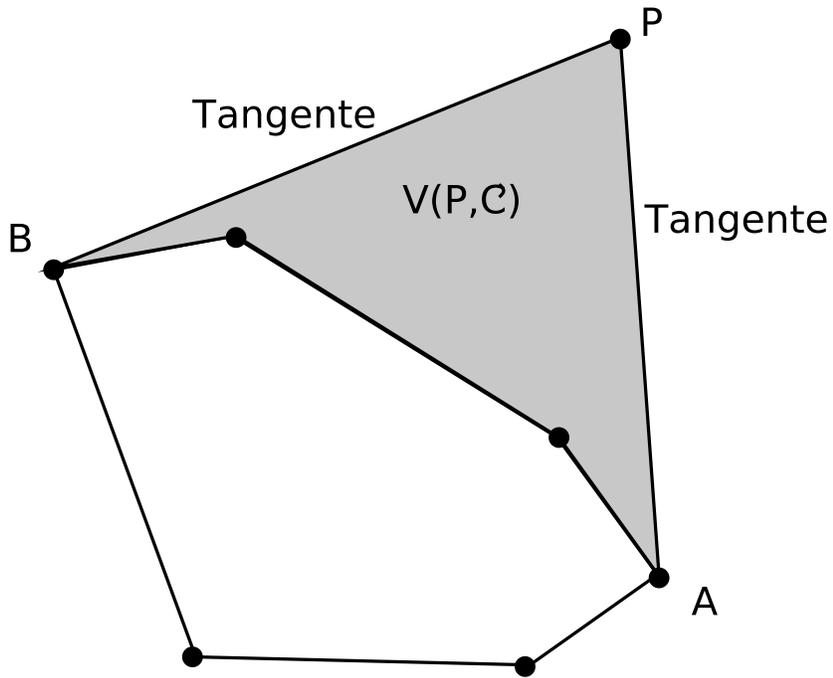


Abbildung 16: Der Sichtbarkeitskegel $V(P, C)$ des Punktes P in Bezug auf C .

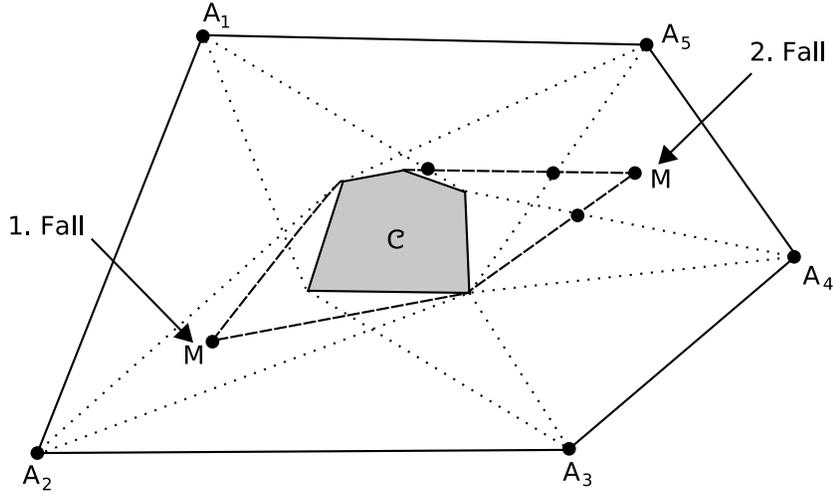


Abbildung 17: Die Fallunterscheidung im Beweis zu Lemma 16.

Falls M auf den Grenzen des Sichtbarkeitskegels $V(A_i, \mathcal{C})$ liegt, sagt Lemma 14 nur aus, dass S_∞ dicht ist auf einer Tangente, welche nicht kollinear ist mit A_i . In diesem Spezialfall reicht dies allerdings um aus die Dichte in $ch(\{M\} \cup \mathcal{C})$ zu zeigen.

2. Fall: Betrachte Abbildung 18. Der Sichtbarkeitskegel $V(M, \mathcal{C})$ schneidet mindestens einen anderen Sichtbarkeitskegel $V(A_i, \mathcal{C})$. Dies sieht man, wenn man einen Punkt P stetig auf dem Rand von $ch(S)$ bewegt. Bei irgendeiner Position enthält der Sichtbarkeitskegel $V(P, \mathcal{C})$ den Punkt M . Falls P ein Eckpunkt von $ch(S)$ ist, erhalten wir den 1. Fall. Ansonsten liegt der Punkt P auf einem Liniensegment $A_i A_{i+1}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, wobei wir A_{n+1} wie folgt definieren müssen: $A_{n+1} := A_1$.

Der Punkt M sieht mindestens eine ganze Kante e von \mathcal{C} . Da $V(M, \mathcal{C}) \subseteq V(P, \mathcal{C})$ gilt, sieht auch P die ganze Kante e . Die Kante e ist auch von A_i oder A_{i+1} aus sichtbar. Dies kann bewiesen werden, indem man einen Punkt Q auf $A_i A_{i+1}$ entlang bewegt. Es kann nicht passieren, dass e zunächst von Q aus nicht sichtbar ist, dann sichtbar wird, und wieder nicht-sichtbar wird. Da e von P aus sichtbar ist, folgt, dass e auch von A_i oder A_{i+1} sichtbar sein muss. Dies beweist auch, dass $V(M, \mathcal{C})$ den Sichtbarkeitskegel $V(A_i, \mathcal{C})$ oder $V(A_{i+1}, \mathcal{C})$ schneidet.

O.B.d.A nehmen wir an, dass $V(M, \mathcal{C})$ den Sichtbarkeitskegel $V(A_i, \mathcal{C})$ schneidet. Seien MC_j und MC_k die Tangenten von \mathcal{C} durch M . Dann liegt ein Teil dieser Tangenten, betrachten wir zunächst MC_j , inner-

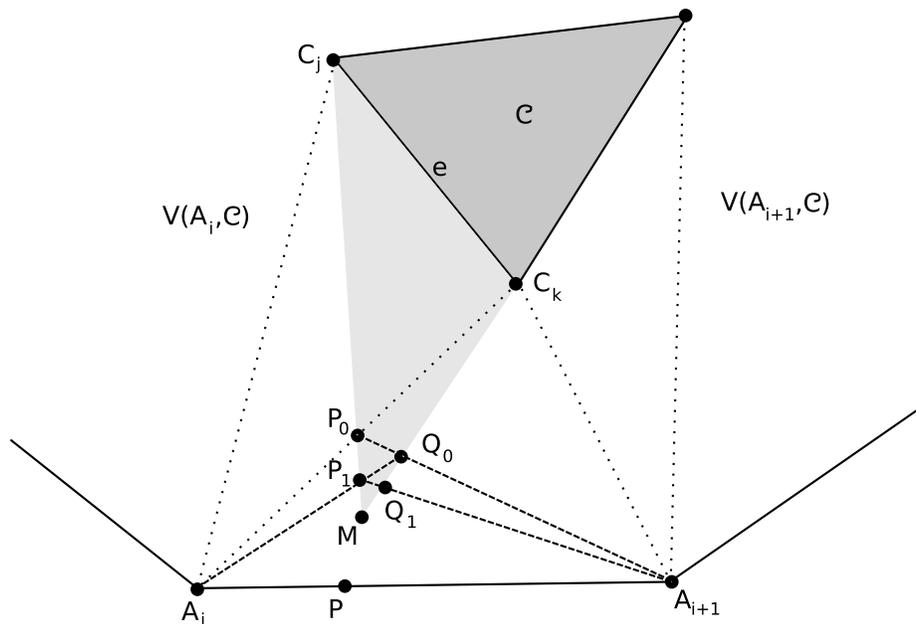


Abbildung 18: Falls M nicht innerhalb eines Sichtbarkegels $V(A_i, \mathcal{C})$ liegt, ist S_∞ dicht in $V(M, \mathcal{C})$.

halb von $V(M, \mathcal{C})$. Sei P_0 der Schnittpunkt von MC_j und dem Rand von $V(A_i, \mathcal{C})$. Dann folgt aus Lemma 14, dass die Schnittpunktmenge S_∞ dicht ist auf P_0C_j . Sei Q_0 der Schnittpunkt von MC_k und $A_{i+1}P_0$. Dann folgt wieder aus Lemma 14, dass S_∞ dicht ist auf Q_0C_k . Wir können dieses Argument nun induktiv anwenden. Im nächsten Schritt sind also $P_1 := A_iQ_0 \cap MC_j$ und $Q_1 := A_{i+1}P_1 \cap MC_k$. Lemma 14 sagt nun aus, dass S_∞ sowohl auf P_1P_0 als auch auf Q_1Q_0 dicht ist. Korollar 13 beweist, dass die beiden so definierten Folgen $(P_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ und $(Q_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ gegen M konvergieren.

Zusammenfassend ist also S_∞ dicht auf den beiden Tangenten MC_j und MC_k . Da es auch in \mathcal{C} dicht ist, ist es auch dicht in $ch(M \cup \mathcal{C})$.

□

Theorem 17 Sei $S = S_1$ eine Menge von n Punkten in der Ebene, die keine Ausnahmekonfiguration darstellt. Dann ist S_∞ dicht im Kandidaten $K(S)$.

Beweis. Falls S keine Ausnahmekonfiguration ist, wissen wir dank Lemma 11, dass S_∞ dicht in einem Dreieck T ist. Dies bedeutet nach Lemma 3, $T \subseteq K(S)$. Wir wissen ebenfalls dank Lemma 3, dass $K(S)$ ein konvexes

Polygon ist, dessen Eckpunkte zu S_∞ gehören. Seien P_1, P_2, \dots, P_n die Eckpunkte von $K(S)$. Dann können wir mit Hilfe von Lemma 16 zeigen, dass S_∞ dicht ist in $ch(T \cup \{P_1\})$. Wenden wir wieder Lemma 16 an, so erhalten wir: S_∞ ist dicht in $ch(T \cup \{P_1, P_2\})$. Wir wiederholen diese Argumentation n -mal um zu beweisen, dass S_∞ dicht ist in $ch(T \cup \{P_1, P_2, \dots, P_n\}) = K(S)$. \square

Literatur

- [1] A. Ebberts-Baumann, A. Grüne, M. Karpinski, R. Klein, C. Knauer, and A. Lingas. Embedding point sets into plane graphs of small dilation. In *Algorithms and Computation: 16th International Symposium*, volume 3827 of *Lecture Notes Comput. Sci.*, pages 5–16. Springer, 2005.
- [2] D. Eppstein. The geometry junkyard. Website. <http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/dilation-free/>.
- [3] A. Grüne and S. Kamali Sarvestani. On the density of iterated line segment intersections. Technical Report 004, Department of Computer Science I, University of Bonn, 2005.
- [4] B. Korte and J. Vygen. *Combinatorial Optimization*. Springer, 2006.