

RHEINISCHE FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT BONN
INSTITUT FÜR INFORMATIK I



Dominik Alexander Klein

Aufteilungen in kreisnahe Gebiete

7. Juni 2007

Seminararbeit im WS 2006/2007

Zusammenfassung

Diese Arbeit behandelt die Aufteilung regelmäßiger Polygone (k -gone) in möglichst kreisähnliche konvexe Teilflächen. Die Kreisähnlichkeit einer Fläche wird hierbei definiert durch das Verhältnis der Radien des kleinsten umschließenden Kreises und des größten enthaltenen Kreises. Es wird gezeigt, dass für gleichseitige Dreiecke eine Aufteilung in unendlich viele Teilflächen existiert, welche dieses Verhältnis optimiert. Für Quadrate konnte das optimale Verhältnis nur eingegrenzt werden. Bei allen regelmäßigen k -gonen mit $k \geq 5$ gibt es keine Aufteilung, die kreisähnlicher ist als das gesamte k -gon. Die wesentlichen Ergebnisse dieser Arbeit sind [1] entnommen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung und Notation	2
2	Grundlegende Sätze	3
2.1	Kreisähnlichkeit unverteilter k -gone	3
2.2	Untere Schranke durch kleinsten Innenwinkel	3
3	Gleichseitige Dreiecke	5
3.1	Aufteilung von Rechtecken	5
3.2	Aufteilung von 80° -Vierecken	7
3.3	Aufteilung von 80° -Kurven	9
3.4	Aufteilung gleichseitiger Dreiecke	9
4	Quadrate	13
4.1	Verminderung der oberen Schranke	13
4.2	Erhöhung der unteren Schranke	13
5	k-gone $k \geq 5$	17
6	Ergebnisübersicht	19

1 Einführung und Notation

Definition 1 Die Kreisähnlichkeit $\lambda_1(P)$ eines Polygons P in einem Stück ist gegeben durch $\lambda_1(P) = \frac{R}{r}$ mit R als dem Radius des kleinsten ganz P umschließenden Kreises und r als dem Radius des größten komplett in P liegenden Kreises.

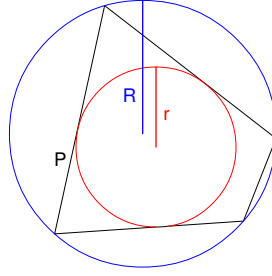


Abbildung 1: Ein konvexes Polygon mit minimalem Umkreis und maximalem Inkreis. $\lambda_1(P) = 1\frac{2}{3}$.

Definition 2 Die Kreisähnlichkeit $\lambda(P)$ einer Aufteilung $P_1, P_2, P_3, \dots, P_k$ eines Polygons P mit $P = \cup_k P_k$ und $(\cap_k P_k)^\circ = \emptyset$ (der Schnitt der Aufteilung ist leer bis auf die Ränder) ist definiert durch $\lambda(P) = \max_i \lambda_1(P_i)$, also das Maximum der Kreisähnlichkeit seiner Teilstücke. Welche spezielle Aufteilung von P gemeint ist wird aus dem jeweiligen Kontext deutlich.

Definition 3 $\lambda^*(P)$ ist die Kreisähnlichkeit einer optimalen, konvexen Aufteilung von P , also das Infimum über alle möglichen $\lambda(P)$. Eine solche Aufteilung muss nicht notwendigerweise von einer Aufteilung mit endlich vielen Stücken erreicht werden.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit ist es das Ziel, jeweils λ^* für alle regelmäßigen k -gone zu bestimmen und eine Aufteilung mit minimaler Anzahl von Teilstücken zu finden, die λ^* erreicht.

2 Grundlegende Sätze

2.1 Kreisähnlichkeit unverteilter k-gone

Lemma 4 Die Kreisähnlichkeit $\lambda_1(P)$ eines unverteilen regelmäßigen k -gons P ist

$$\lambda_1(P) = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{k}}$$

Beweis. Der kleinste Umkreis eines regelmäßigen k -gons ist der Kreis durch alle Eckpunkte des k -gons. Der größte Inkreis ist der Kreis, der alle Kanten tangential berührt. Die Radien bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Winkel β wie in Abbildung 2 dargestellt. Es gilt

$$\cos \beta = \frac{r}{R} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos \beta} = \frac{R}{r} = \lambda_1(P)$$

mit $\beta = \frac{\pi}{k}$. □

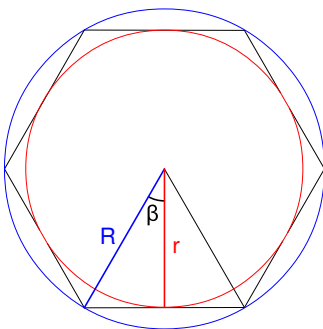


Abbildung 2: R und r bilden im k -gon immer ein rechtwinkliges Dreieck mit $\beta = \frac{\pi}{k}$. Hier ein Sechseck als Beispiel.

2.2 Untere Schranke durch kleinsten Innenwinkel

Lemma 5 Besitzt ein Polygon P einen konvexen Innenwinkel θ , so ist dadurch eine untere Schranke λ_θ für die Kreisähnlichkeit der optimalen Aufteilung des Polygons gegeben durch

$$\lambda_\theta(P) = \frac{1 + \frac{1}{\sin(\theta/2)}}{2} \leq \lambda^*(P).$$

Beweis. Angenommen θ ist von der Aufteilung des Polygons nicht betroffen. Dann ist der größtmögliche Inkreis des θ enthaltenden Teilstücks tangential begrenzt durch die beiden Seiten an diesem Winkel, denn sonst ließe sich sein Mittelpunkt auf die Winkelhalbierende verschieben, wodurch sich ein

gleichmäßiger Abstand zu den Seiten ergäbe. Diesen könnte man ausnutzen, um den Inkreis noch zu vergrößern, bis er schließlich doch tangential beide Seiten berührt. Außerdem muss der Inkreis komplett innerhalb des Umkreises liegen. Der kleinste mögliche Umkreis muss durch die Spitze des Winkels verlaufen und sich gegenüber tangential an den Inkreis anschmiegen (Abbildung 3). Man kann sehen

$$\begin{aligned} \sin(\theta/2) &= \frac{r}{2R-r} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sin(\theta/2)} &= \frac{2R}{r} - 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1 + \frac{1}{\sin(\theta/2)}}{2} &= \frac{R}{r} = \lambda_\theta(P) \end{aligned}$$

Im anderen Fall, wenn θ von der Aufteilung betroffen wäre, dann gäbe es ein Teilstück mit kleinerem Winkel als θ , auf welchen dieses Lemma angewendet sich eine noch größere untere Schranke ergäbe. $\square$

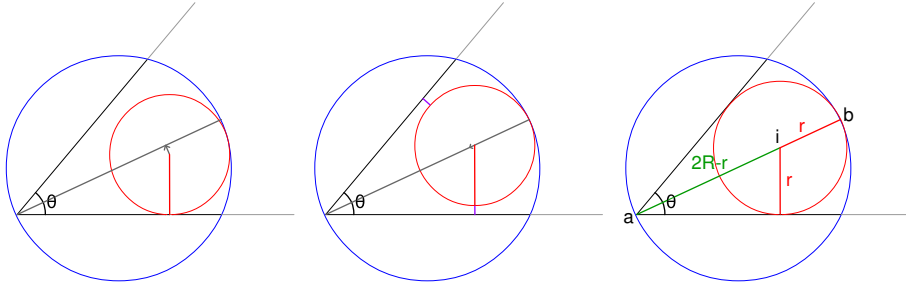


Abbildung 3: Untere Schranke durch Innenwinkel θ .

Da der Sinus im Bereich $[0, \frac{\pi}{2}]$ monoton wächst und im konvexen Polygon jeder Innenwinkel θ immer zwischen 0 und π liegt, bestimmt der kleinste Winkel eines konvexen Polygons die schärfste untere Schranke $\lambda_\theta \leq \lambda^*$.

Lemma 6 *Die durch den kleinsten Winkel θ in einem Polygon P vorgegebene Schranke $\lambda_\theta(P)$ kann von keiner endlichen konvexen Aufteilung von P erreicht werden.*

Beweis. Um den Schnittpunkt des in Lemma 5 zur Berechnung von λ_θ benutzten maximalen Inkreises und minimalen Umkreises kann kein endliches Polygon vollständig zwischen beiden Kreisen liegen, es muss entweder kurz außerhalb des Umkreises verlaufen, dann wäre dieser zu klein, oder kurz innerhalb des Inkreises, dann wäre jener zu groß. Also gilt für alle Polygone $\lambda(P) > \lambda_\theta(P)$. $\square$

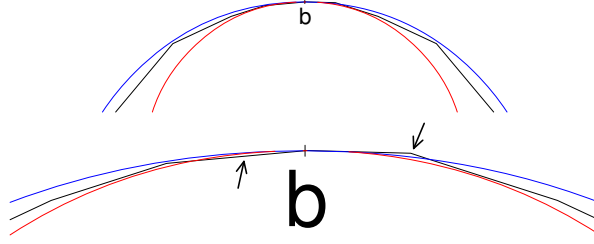


Abbildung 4: Zwischen theoretischem In- und Umkreis kann kein Polygon verlaufen.

3 Gleichseitige Dreiecke

Nach Lemma 5 wissen wir, dass $\lambda^*(P_3) \geq \lambda_{60^\circ}(P_3) = 1.5$ sein muss. Im Folgenden soll eine Aufteilung beschrieben werden, die mit unendlich vielen Teilen $\lambda(P_3) = \lambda_{60^\circ}(P_3)$ tatsächlich erreicht. Dazu werden zunächst einige Hilfsmittel gebraucht:

3.1 Aufteilung von Rechtecken

Lemma 7 Jedes Rechteck R , dessen Seitenverhältnis $a(R) \leq \frac{3}{2\sqrt{2}}$ der größeren zur kleineren Seite erfüllt, hat eine Kreisähnlichkeit $\lambda_1(R) < \frac{3}{2}$.

Beweis. In konzentrische Kreise mit dem Verhältnis $\lambda = \frac{3}{2}$ passt auch ein größeres Quadrat als eines mit der Seitenlänge $2r$, denn dafür würde schon $\lambda = \sqrt{2}$ genügen. Aus Abbildung 5 kann man leicht nachvollziehen, dass maximal ein Quadrat mit Seitenlänge $2 \cdot \frac{3}{\sqrt{8}}r = \frac{3}{\sqrt{2}}r$ zwischen solche Kreise passt. Da diese beiden Quadrate Platz fänden, findet auch ein Rechteck mit den Seitenlängen $\frac{3}{\sqrt{2}}r$ und $2r$, also dem Seitenverhältnis $a(R) = \frac{\frac{3}{\sqrt{2}}r}{2r} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$ Platz.

Bei jedem Rechteck mit kleinerem Seitenverhältnis kann man also entweder einen kleineren Umkreis oder einen größeren Inkreis finden. $\square$

Lemma 8 Für jedes $\epsilon > 0$ kann jedes beliebige Rechteck R so in eine endliche Anzahl kleinerer Rechtecke aufgeteilt werden, dass alle diese kleineren Rechtecke ein maximales Seitenverhältnis $1 + \epsilon$ besitzen.

Beweis. Das Rechteck sei o.B.d.A. $R = [0, b] \times [0, a]$, wobei $a \leq b$. Sei $k_b = \lceil 1/\epsilon \rceil$, für alle Quadrate mit Seitenlänge $l \leq \frac{b}{k_b}$ gilt: wenn man eine Reihe in x-Richtung so voll wie möglich füllt, dann kann man diese Quadrate in x-Richtung strecken, so dass sie b komplett abdecken, aber ihr Seitenverhältnis $\leq 1 + \epsilon$ erfüllt. Denn $\lfloor \frac{b}{l} \rfloor \cdot (l \cdot \epsilon) \geq k_b \cdot (l \cdot \epsilon) \geq l$, die Lücke (grün) jedoch $< l$ ist.

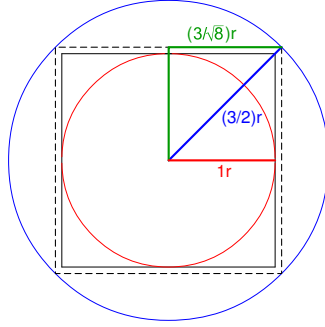


Abbildung 5: Das maximal und minimal in Kreise mit $\lambda = \frac{3}{2}$ passende Quadrat.

Sei $k_a = \left\lceil a / \frac{b}{k_b} \right\rceil$, dann kann man das Rechteck in y-Richtung mit k_a vielen Quadraten der Seitenlänge $s = \frac{a}{k_a} \leq \frac{b}{k_b}$ genau auslegen (die blauen Quadrate) und in x-Richtung ausgelegt so strecken, dass sich ein Seitenverhältnis $\leq 1 + \epsilon$ ergibt. $\square$

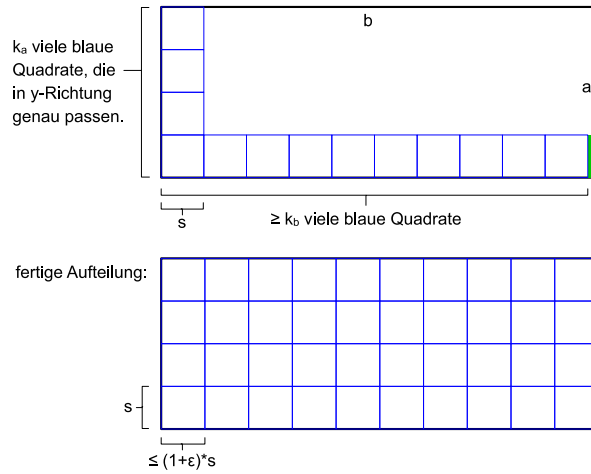


Abbildung 6: Die grüne Lücke kann durch Streckung von mindestens k_b vielen Quadraten gefüllt werden..

Lemma 9 Für jedes Rechteck R gibt es eine endliche Aufteilung mit $\lambda(R) \leq \frac{3}{2}$.

Beweis. Aus Lemma 7 und Lemma 8 ergibt sich, dass mit

$$1 + \epsilon \leq \frac{3}{2 \cdot \sqrt{2}} \Leftrightarrow \epsilon \leq \frac{3}{2 \cdot \sqrt{2}} - 1 \approx 0,060660$$

es für jedes Rechteck eine endliche Aufteilung gibt mit $\lambda \leq \frac{3}{2}$. $\square$

Genauso könnte auch jeder Wert $\lambda(R) > \sqrt{2}$ bewiesen werden, was aber im folgenden nicht benötigt wird.

3.2 Aufteilung von 80° -Vierecken

Als nächstes wird das Ergebnis von Rechtecken auf leicht verbogene Rechtecke, sogenannte 80° -Vierecke, verallgemeinert. Dazu stellen wir als erstes fest:

Lemma 10 *Es gibt Vierecke V mit einem rechten Winkel und einem gegenüberliegenden Winkel von nur 80° mit $\lambda(V) \leq \frac{3}{2}$.*

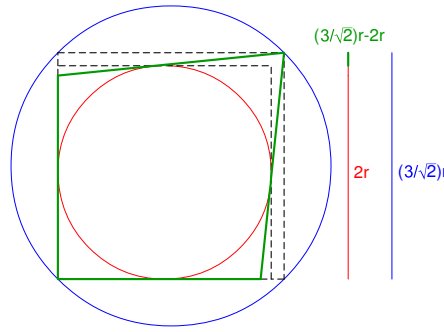


Abbildung 7: Ein Viereck mit einem rechten Winkel und einem Winkel gegenüber von ca. 79° mit $\lambda = \frac{3}{2}$.

Beweis. Inspiriert von Abbildung 5 kommt man auf die Idee, den Raum zwischen kleinstem passenden und größten passenden Quadrat für ein solches Viereck zu nutzen. Das Ergebnis zeigt Abbildung 7. Der Winkel gegenüber dem rechten beträgt mindestens $2 \cdot \arccos \frac{9}{2 \cdot \sqrt{34}} \approx 78.978550^\circ$. $\square$

Dieses Ergebnis wird nun auf alle Ecken eines Vierecks erweitert.

Definition 11 Ein Viereck V mit allen Innenwinkeln im Bereich $90^\circ \pm 10^\circ$ ist ein sogenanntes 80° -Viereck.

Lemma 12 *Jedes 80° -Viereck besitzt $\lambda^*(V) \leq \frac{3}{2}$.*

Beweis. Man zerteilt das 80° -Viereck V mittels zweier orthogonaler Geraden, die keine Schnittwinkel kleiner 80° mit V haben, in vier Teile.

Dass dies möglich ist wollen wir kurz beweisen: Seien p_1, p_2, p_3 und p_4 die Eckpunkte eines 80° -Vierecks gegen den Uhrzeigersinn sortiert. Dann sind die Richtungsvektoren der Seiten gegeben durch $v_i := p_{i+1} - p_i$ und $e_i := (1/|v_i|)v_i$ die auf Länge 1 normierten Richtungsvektoren (Abbildung 8a+b).

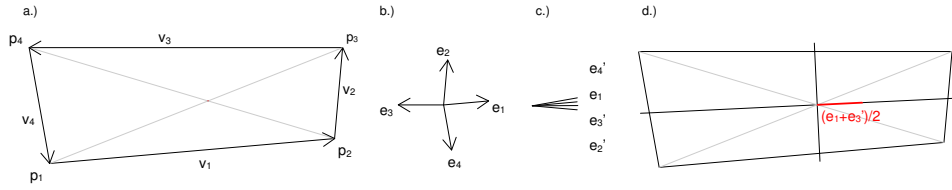


Abbildung 8: Aufteilung eines 80°-Vierecks in 4 Teile durch orthogonale Geraden.

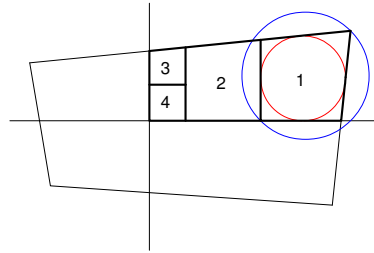


Abbildung 9: Partitionierung jedes Teils mit $\lambda \leq \frac{3}{2}$ möglich.

Sei jeweils α_i der Winkel zwischen dem zugehörigen Einheitsvektor und der x-Achse, also $e_i = (\cos \alpha_i, \sin \alpha_i)$. Nun dreht man jeden dieser Einheitsvektoren soweit mit dem Uhrzeigersinn, dass im Falle eines Rechteckes alle Vektoren auf e_1 liegen würden: $\beta_1 := \alpha_1$, $\beta_2 := \alpha_2 - 90^\circ$, $\beta_3 := \alpha_3 - 180^\circ$, $\beta_4 := \alpha_4 - 270^\circ$ (Abbildung 8c).

Mit einem Winkel β , der von allen β_i nur um höchstens 10° abweicht, sind mögliche orthogonale Geraden gefunden, denn das 90° -Kreuz, dessen eine Ausrichtung gleich β ist und welches im Zentroid liegt, erfüllt die Schnittbedingung.

Wähle $\beta := (\beta_1 + \beta_3)/2$, dann gilt

$$\begin{aligned} & |\beta_1 - \beta| \\ (\text{nach Def. } \beta) &= \frac{1}{2} |\beta_1 - \beta_3| \\ (\text{da } 80^\circ\text{-Viereck}) &\leq \frac{1}{2} 20^\circ \\ &= 10^\circ \end{aligned}$$

Analog gilt $|\beta_3 - \beta| \leq 10^\circ$. Außerdem gilt nach der Dreiecksungleichung auch $|\beta_2 - \beta| \leq 10^\circ$, denn

$$\begin{aligned} |\beta_2 - \beta| &\leq \left| \frac{\beta_2 - \beta_1}{2} \right| + \left| \frac{\beta_2 - \beta_3}{2} \right| \\ &= \frac{1}{2} |\beta_2 - \beta_1| + \frac{1}{2} |\beta_2 - \beta_3| \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2}10^\circ + \frac{1}{2}10^\circ = 10^\circ.$$

Analog gilt auch $|\beta_4 - \beta| = < 10^\circ$ (Abbildung 8d).

Jedes dieser Teile hat im Innern nun einen rechten Winkel. Man kann den Rand mit Vierecken nach Lemma 10 pflastern (Abbildung 9: 1, 2 u. 3), so dass im Innern ein Rechteck übrig bleibt (4). Nach Lemma 9 war ein solches auch immer zerlegbar, so dass insgesamt $\lambda(V) \leq \frac{3}{2}$. $\square$

3.3 Aufteilung von 80° -Kurven

Definition 13 Seien $A(t)$ und $B(t)$ zwei parametrisierte Kurven mit $t \in [0 : 1]$. Wenn für jedes t gilt, dass die Gerade durch $A(t)$ und $B(t)$ die Kurventangenten an diesen Stellen so schneidet, dass der kleinere entstehende Winkel mindestens 80° beträgt, so sind $A(t)$ und $B(t)$ zueinander sogenannte 80° -Kurven.

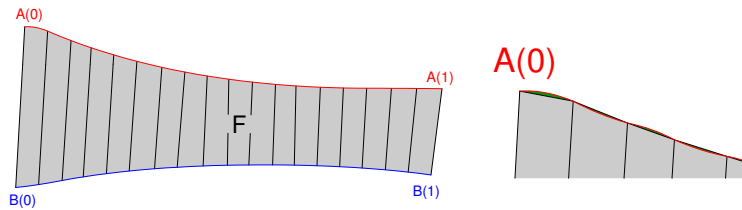


Abbildung 10: Annäherung der Fläche zwischen 80° -Kurven durch 80° -Vierecke.

Lemma 14 Für eine zwischen 80° -Kurven $A(t)$ und $B(t)$ gelegene Fläche F gibt es eine Folge von Regionen $(R_i)_{i \in \mathbb{N}}$, so dass für alle i gilt $\lambda^*(R_i) \leq \frac{3}{2}$ und $R_i \rightarrow F$.

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $t_0 = 0 \cdot \frac{1}{n}, t_1 = 1 \cdot \frac{1}{n}, \dots, t_n = n \cdot \frac{1}{n}$. Die Punkte $(A(t_i), A(t_{i+1}), B(t_{i+1}), B(t_i))$, $i = 0..n-1$ bilden nach Definition 13 ein 80° -Viereck. Dieses kann nach Lemma 12 so aufgeteilt werden, dass $\lambda \leq \frac{3}{2}$. Für $n \rightarrow \infty$ ergibt sich eine beliebig genaue Näherung der Fläche F . $\square$

3.4 Aufteilung gleichseitiger Dreiecke

Mit Hilfe der eben eingeführten "Bauteile" wird nun eine Aufteilung eines gleichseitigen Dreiecks beschrieben, deren Kreisähnlichkeit beliebig eng an $\lambda^*(P_3) = \frac{3}{2}$ angenähert werden kann.

Kritisch für diese Schranke sind die 60° Ecken des Dreiecks, die verantwort-

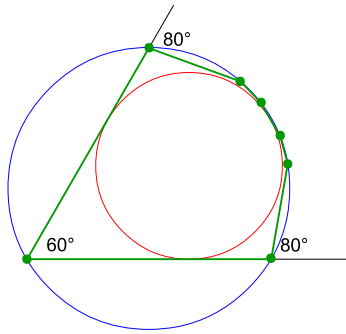


Abbildung 11: $\lambda = \frac{3}{2}$ wird in 60° Ecken mit Polygon angenähert.

lich dafür sind, dass $\lambda = \frac{3}{2}$ nach Lemma 6 nicht erreicht werden kann. Diese können durch ein Polygon angenähert werden.
In der Mitte wird ein regelmäßiges Sechseck auf dem Schwerpunkt des Drei-

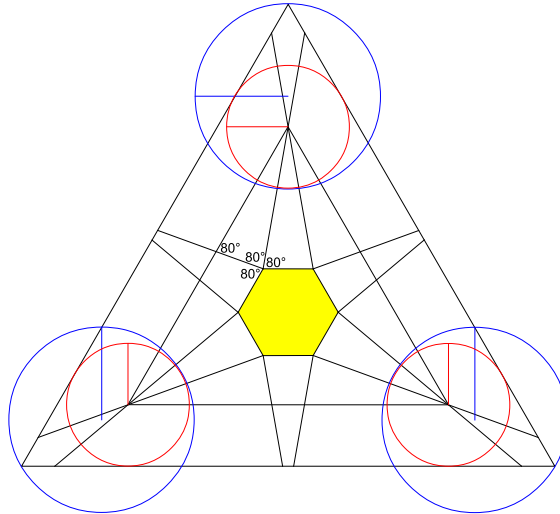


Abbildung 12: Konstruktion der Eckpolygone und des mittleren Sechseck.

ecks zentriert. Dieses muss eine Größe aufweisen, dass sich Strahlen, die im 80° Winkel von den Ecken zu einer Ecke des Dreiecks abgehen, noch innerhalb des Dreiecks schneiden, und zwar genau so, dass dieser Schnittpunkt der Mittelpunkt für den Inkreis eines Eckpolygons ist. (Abbildung 12).
Der Raum zwischen einem beliebig genauen Eckpolygon und dem Sechseck kann vollständig mit 80° -Vierecken geschlossen werden wie in Abbildung 13. Die grünen Strahlen laufen auf den Mittelpunkt des Inkreises zu, bilden also auf dem Inkreis 90° Winkel, auf der Gegenseite Winkel mit mindestens 80° . Die orangenen Strahlen bilden mit der gleichen Konstruktion an der Nach-

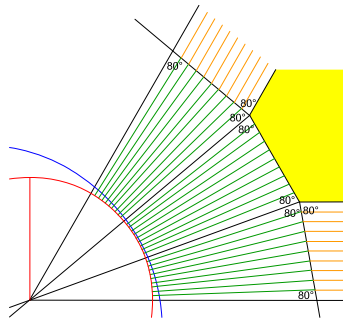


Abbildung 13: Raum zwischen Eckpolygon und Sechseck kann mit 80° -Vierecken geschlossen werden..

barecke 80° -Vierecke.

Auch der verbliebene Raum am Rand des Dreiecks kann mit 80° -Vierecken

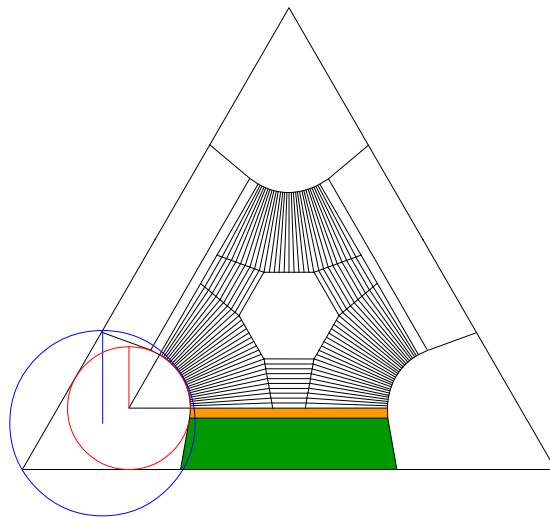


Abbildung 14: Schema der Gesamtaufteilung eines gleichseitigen Dreiecks.

vollständig geschlossen werden, denn der orange Bereich in Abbildung 14 kann mit weiteren waagerechten 80° -Vierecken dem Eckpolygon so genau wie nötig angepasst werden, der übrig bleibende grüne Bereich ist ein einziges weiteres 80° -Viereck.

Lemma 15 *Ein gleichseitiges Dreieck kann durch eine Aufteilung $\mathcal{P}$ mit einer endlichen Anzahl Stücke nur so geteilt werden, dass $\lambda(\mathcal{P}) > \frac{3}{2}$. Es gibt jedoch eine Folge von Aufteilungen $(\mathcal{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit monoton wachsender Zahl an Polygonen, so dass $\lambda(\mathcal{P}_n)$ gegen $\frac{3}{2}$ konvergiert. Es gilt also $\lambda^*(D) = \frac{3}{2}$ für jedes gleichseitige Dreieck.*

Beweis. Die eben beschriebene Aufteilung benutzt nur 80° -Vierecke, für die nach Lemma 12 eine endliche Aufteilung $\lambda^*(V) \leq \frac{3}{2}$ existiert, ein regelmäßiges Sechseck, welches nach Lemma 4 $\lambda_1(P_6) \approx 1,1547 < \frac{3}{2}$ erfüllt sowie die Eckpolygone, für die gilt $\lambda \rightarrow \frac{3}{2}$ je mehr Ecken man verwenden darf. $\square$

4 Quadrate

Einfache untere und obere Schranken für Quadrate nach Lemma 4 und Lemma 5 sind zunächst

$$1.207107 \approx \lambda_{90^\circ}(P_4) \leq \lambda^*(P_4) \leq \lambda_1(P_4) \approx 1.414214$$

Diese sind jedoch sehr grob. Im weiteren Verlauf sollen sie deshalb verbessert werden.

4.1 Verminderung der oberen Schranke

Abbildung 15 zeigt eine Aufteilung eines Quadrats in 92 Teile mit $\lambda = 1.29950$, also muss $\lambda^*(P_4) \leq 1.29950$ sein.

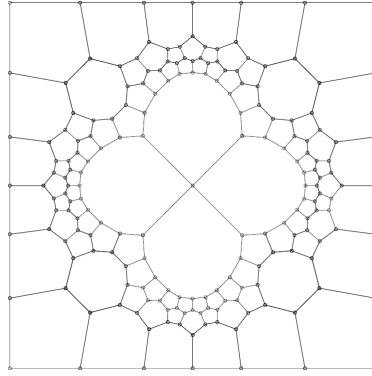


Abbildung 15: Die beste bekannte Aufteilung eines Quadrats mit $\lambda = 1.29950$.

4.2 Erhöhung der unteren Schranke

Man betrachte das Eckstück einer Aufteilung und seine Nachbarstücke am Rand (Abbildung 16). Falls $\theta < 90^\circ$ gilt, ergibt sich eine schärfere untere Schranke für B aus Lemma 5. Wenn man jedoch $\theta \geq 90^\circ$ gelten würde, müsste man den Umkreis von A erweitern. Diese beiden Tatsachen muss man gegeneinander abwägen, so dass für θ gilt $\lambda_1(A_\theta) = \lambda_1(B_\theta)$. Dabei ist wie wir im folgenden zeigen $\lambda_1(A_\theta) \geq \frac{1+\tan(\theta/2)}{\sqrt{2}}$. Wenn man den Inkreisradius $r_A = 1$ definiert gilt wegen $|tb| = |bu|$

$$d = \frac{1}{\tan \frac{180^\circ - \theta}{2}} = \tan \frac{\theta}{2} \quad (1)$$

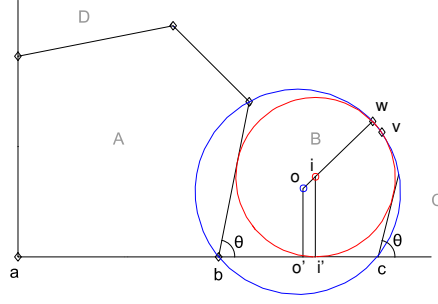


Abbildung 17: Umkreis von B muss für Punkt c größer sein.

um R_B zu minimieren und ein kleinst-mögliches $\lambda_1(B)$ zu bestimmen. Im weiteren Verlauf sei zur Vereinfachung der Ursprung auf dem Punkt b angenommen und $r_b = 1$ festgelegt. Seien $o = (x_o, y_o)$ das Zentrum des Umkreises von B und $i = (x_i, y_i)$ der Mittelpunkt des Inkreises von B. Dann gilt

$$x_i = |bi'| = \frac{1}{\tan(\theta/2)} \text{ und } y_i = 1 \quad (3)$$

sowie

$$x_o = \frac{|bc|}{2} = \frac{|bi'| + |i'c|}{2} = \frac{(1/\tan(\theta/2)) + \tan(\theta/2)}{2} \quad (4)$$

da die Projektion o' von o die Strecke $\overline{bc}$ mittig teilt. Außerdem ist

$$(R_B - 1)^2 = (x_i - x_o)^2 + (y_i - y_o)^2 \quad (5)$$

und

$$\begin{aligned} R_B^2 &= x_o^2 + y_o^2 \\ \Leftrightarrow R_B &= \sqrt{x_o^2 + y_o^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

aus den obigen Gleichungen ergibt sich y_o wie folgt:

Gleichung 6 in Gleichung 5:

$$\begin{aligned} &(\sqrt{x_o^2 + y_o^2} - 1)^2 = (x_i - x_o)^2 + (y_i - y_o)^2 \\ \Leftrightarrow &x_o^2 + y_o^2 - 2\sqrt{x_o^2 + y_o^2} + 1 = x_i^2 - 2x_o x_i + x_o^2 + y_i^2 - 2y_o y_i + y_o^2 \\ \Leftrightarrow &-2\sqrt{x_o^2 + y_o^2} + 1 = x_i^2 - 2x_o x_i + y_i^2 - 2y_o y_i \end{aligned}$$

Einsetzen von Gleichung 3 und Gleichung 4:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow &-2\sqrt{x_o^2 + y_o^2} + 1 = \left(\frac{1}{\tan(\frac{\theta}{2})}\right)^2 - 2\left(\frac{(1/\tan(\frac{\theta}{2})) + \tan(\frac{\theta}{2})}{2}\right)\left(\frac{1}{\tan(\frac{\theta}{2})}\right) + 1 - 2y_o \\ \Leftrightarrow &-2\sqrt{x_o^2 + y_o^2} = \left(\frac{1}{\tan(\frac{\theta}{2})}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2(\tan(\frac{\theta}{2}))^2} + \frac{1}{2}\right) - 2y_o \\ \Leftrightarrow &-2\sqrt{x_o^2 + y_o^2} = -1 - 2y_o \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 4(x_o^2 + y_o^2) = 1 + 4y_o + 4y_o^2 \\
&\Leftrightarrow 4x_o^2 = 1 + 4y_o \\
&\Leftrightarrow \frac{4x_o^2 - 1}{4} = y_o
\end{aligned} \tag{7}$$

was zusammen mit Gleichung 4 und 6 zum Ergebnis

$$\begin{aligned}
R_B &= \sqrt{x_o^2 + y_o^2} \\
&= \sqrt{x_o^2 + \left(\frac{4 \cdot x_o^2 - 1}{4}\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{(1/\tan(\theta/2)) + \tan(\theta/2)}{2}\right)^2 + \left(\frac{4 \cdot \left(\frac{(1/\tan(\theta/2)) + \tan(\theta/2)}{2}\right)^2 - 1}{4}\right)^2} \\
&\leq \lambda_1(B_\theta)
\end{aligned}$$

führt. Benutzt man dieses in $\lambda_1(A_\theta) = \lambda_1(B_\theta)$ ergibt sich die verbesserte untere Schranke $\theta \approx 78.87^\circ$ und $\lambda_1(A_\theta) = \lambda_1(B_\theta) \approx 1.28868$.

5 k -gone $k \geq 5$

Man kann sich leicht überlegen, dass für $k \rightarrow \infty$ ein k -gon sich einem Kreis angleicht. Je höher k , desto besser die Approximation eines Kreises, desto besser die Kreisähnlichkeit. Wir werden sehen, dass es daher ein i gibt, ab dem alle k -gone mit $k \geq i$ unzerlegt die beste Kreisähnlichkeit besitzen.

Theorem 16 *Ein regelmäßiges Fünfeck ist unzerlegt bereits optimal kreisähnlich aufgeteilt. Es gibt keine Aufteilung, die besser ist als $\lambda_1(P_5)$ und somit gilt nach Lemma 4*

$$\lambda^*(P_5) = \lambda_1(P_5) = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{5}} \approx 1.236068$$

Beweis. Zum Beweis betrachten wir die möglichen Aufteilungen im Umfeld einer Ecke des Pentagons. Der Innenwinkel an einer solchen Ecke beträgt $\frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$. Würde eine Aufteilung durch den Eckpunkt verlaufen, so würde ein Winkel $\alpha \leq 54^\circ$ dabei entstehen. Nach Lemma 5 ist jedoch $\lambda_{54^\circ} \approx 1,601345 > \lambda_1(P_5)$, also würde eine solche Aufteilung die Kreisähnlichkeit verschlechtern. Es bleibt zu zeigen, dass auch Aufteilungen, die nicht direkt durch einen Eckpunkt verlaufen, $\lambda_1(P_5)$ nicht verbessern können. Dies wird noch einmal in drei Unterfälle aufgeteilt, die einzeln gezeigt werden:

1. Fall: Beide Winkel rechts und links an den zur Ecke gehörenden Kanten sind spitzwinklig ($\leq 90^\circ$).

Nehmen wir an, beide anliegenden Winkel seien genau 90° groß, da kleinere Winkel die Kreisähnlichkeit nur verschlechtern könnten. Abbildung 18 zeigt, dass es für Kreise mit dem Verhältnis $\lambda_1(P_5)$ offensichtlich nicht möglich ist, ein Polygon mit interner Winkelreihe ($90^\circ, 108^\circ, 90^\circ$) zu konstruieren, welches zwischen diesen liegt.

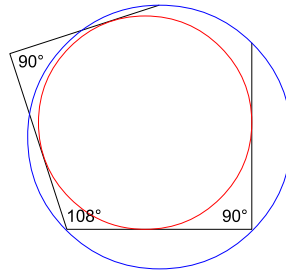


Abbildung 18: Die Winkel des Polygons sind zu eng, den kleineren Kreis zu umspannen und trotzdem innerhalb des größeren zu liegen.

2. Fall: Ein Winkel ist spitz ($\leq 90^\circ$), der andere stumpf ($> 90^\circ$).
Wir gehen wieder davon aus, dass der spitze Winkel genau 90° beträgt.

An Abbildung 19 können wir sehen, dass der kleinste stumpfe Winkel mindestens $\approx 134,2^\circ$ betragen muss, damit das Polygon zwischen den Kreisen mit Verhältnis $\lambda_1(P_5)$ verlaufen kann. Dann beträgt dessen Nebenwinkel aber höchstens $45,8^\circ$. Dieser Nebenwinkel muss bestenfalls ganz in einem Nachbarteilstück der Aufteilung von P_5 sein, nach Lemma 5 ist $\lambda_{45,8^\circ} \approx 1,784938 > \lambda_1(P_5)$.

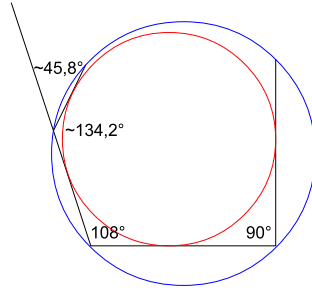


Abbildung 19: Der entstehende Nebenwinkel ist zu spitz, um $\lambda_1(P_5)$ zu halten.

3. Fall: Beide Winkel sind stumpf ($> 90^\circ$).

Dies müsste für alle Ecken gelten, da die andern Fälle bereits ausgeschlossen wurden. Betrachtet man nun zwei benachbarte Ecken im Fünfeck, so muss es zwischen Ihnen ein Verbindungsstück geben, welches auf der Kante zwischen den Punkten zwei spitze Winkel besitzt, denn auf einer geraden Linie können nie zwei stumpfe Winkel benachbart sein (Abbildung 20).

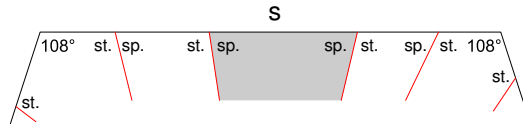


Abbildung 20: Zwischen zwei Ecken gibt es ein Stück mit zwei spitzen Winkeln auf s.

Dieses Verbindungsstück betrachten wir nun genauer. Sein Umkreis/Inkreis Verhältnis muss kleiner sein als das eines Stückes mit zwei 90° Winkeln wie in Abbildung 21. Der maximale Inkreis eines solchen Stückes muss sich tangential an alle 3 Kanten anlegen und innerhalb des Umkreises liegen. Der minimale Umkreis muss durch die Eckpunkte verlaufen. Es ergibt sich ein rechtwinkliges Dreieck mit

$$(2r - R)^2 + r^2 = R^2$$

$$\begin{aligned}
4r^2 - 4rR + R^2 + r^2 &= R^2 \\
5r^2 - 4rR &= 0 \\
\frac{5r}{R} - 4 &= 0 \\
\frac{r}{R} &= \frac{4}{5} \\
\frac{R}{r} &= \frac{5}{4} = 1.25 > \lambda_1(P_5)
\end{aligned}$$

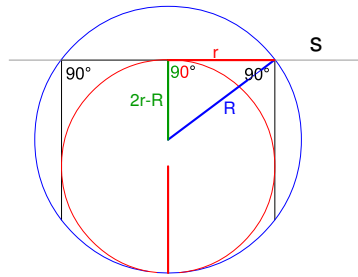


Abbildung 21: Ein Verbindungsstück mit zwei spitzen Winkeln hat mindestens $\lambda = 1,25$.

Da nun alle Möglichkeiten für eine bessere Aufteilung ausgeschlossen wurden, muss das regelmäßige Fünfeck unzerteilt optimal kreisähnlich sein. $\square$

Offensichtlich gilt das Gezeigte auch für alle regelmäßigen k -gone $k > 5$, denn der Beweis gilt analog auch für alle Innenwinkel größer 108° , so dass auch für diese gilt, es gibt keine bessere Aufteilung als das unzerteilte k -gon.

$$\forall k \geq 5 : \lambda^*(P_k) = \lambda_1(P_k)$$

6 Ergebnisübersicht

Insgesamt konnten folgende Ergebnisse für regelmäßige k -gone bewiesen werden:

k	λ_θ	λ_1	λ^*
3	$\lambda_{60^\circ} = 1,5$	2	$= \lambda_{60^\circ}$
4	$\lambda_{90^\circ} \approx 1,207107$	$\sqrt{2}$	$1,28868 \leq \lambda^* \leq 1.29950$
5	$\lambda_{108^\circ} \approx 1,118034$	$\approx 1,236068$	$= \lambda_1$
6	$\lambda_{120^\circ} \approx 1,077350$	$\approx 1,154701$	$= \lambda_1$
$n \geq 7$	$\lambda_{(n-2) \cdot 180^\circ / n}$	$= \frac{1}{\cos(\pi/n)}$	$= \lambda_1$

Literatur

- [1] M. Damian and J. O'Rourke. Partitioning regular polygons into circular pieces I: Convex partitions. CS 1, Department of Computer Science, Villanova University, Villanova and Department of Computer Science, Smith College, Northampton, 2003.