

RHEINISCHE FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT BONN
INSTITUT FÜR INFORMATIK I



Elias Schäfer

Ausarbeitung: Kinetic Collision Detection for Simple Polygons

21. Mai 2007

Seminararbeit im SS 2007

Zusammenfassung

Dies ist eine Ausarbeitung des Papers "Kinetic Collision Detection for Simple Polygons" von Kirkpatrick, Snoeyink und Speckmann [3]. Es wird auf alle Aspekte, welche die originale Arbeit beinhaltet, detailliert eingegangen. Zusätzlich gibt es eine kompakte Einführung in kinetische Datenstrukturen anhand eines Beispiels.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	2
2	Kinetische Datenstrukturen	3
3	Triangulierung	6
4	Partitionsdreiecke	7
5	Korridore	14
5.1	Pseudotriangulierung von Pfaden	16
5.2	Pseudotriangulierung von Taschen	23
6	Wartung	24
6.1	Partitionsdreiecke	27
6.1.1	Bewegungs-Ereignis	28
6.1.2	Tausch-Ereignis	30
6.2	Pseudodreiecke	30
6.2.1	Eck-Zertifikatfehler	30
6.2.2	Seiten-Zertifikatfehler	36
7	Eigenschaften der KDS	39
7.1	Kompaktheit	39
7.2	Lokalität	39
7.3	Ansprechverhalten	39
7.4	Effizienz	40

1 Einführung

Ziel der Autoren ist es, eine kinetische Datenstruktur zu entwickeln, welche Kollisionen zwischen sich bewegenden Polygonen in der Ebene erkennt. Die Bewegungen sind als kontinuierlich vorausgesetzt, was Sprünge untersagt. Ein Framework für Kinetische Datenstrukturen wurde von Basch, Guibas und Hershberger in [1] vorgestellt und die Implementierbarkeit in [2] untersucht. Die Polygone bewegen sich anhand eines Flugplans, welcher jeweils durch Polynome eines festen Grades d gegeben sind, siehe Abbildung 1. Auf die Flugpläne soll es hier aber nicht in erster Linie ankommen. Sie werden nicht weiter besprochen.

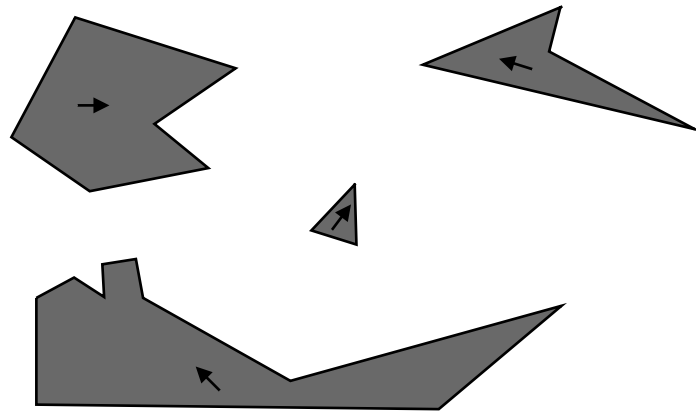


Abbildung 1: Polygone bewegen sich in der Ebene, angedeutet durch Richtungspfeile. Die Flugpläne dürfen durchaus komplexer sein.

2 Kinetische Datenstrukturen

Die generelle Funktionsweise von kinetischen Datenstrukturen kann besonders gut anhand eines einfachen Beispiels zur Erhaltung der konvexen Hülle verständlich gemacht werden. Angenommen, es soll die konvexe Hülle von n sich bewegenden Punkten in der Ebene über die Zeit gewartet werden (dies setzt voraus, dass die konvexe Hülle zum Startzeitpunkt der Bewegung bereits errechnet ist). Es fällt auf, dass sich die konvexe Hülle kombinatorisch nur zu bestimmten Zeitpunkten ändern kann, nämlich genau dann, wenn drei Punkte kollinear werden, von denen mindestens zwei benachbarte Punkte auf der konvexen Hülle sind. Es ändert sich bis zu einem solchen Ereignis nichts an der kombinatorischen Beschreibung der konvexen Hülle. Die kombinatorische Beschreibung wird im Ansatz der Kinetischen Datenstrukturen zu einer Funktion, welche abhängig von der Zeit ist: $KonfFkt_{ch}(t) = (A, B, C, D, E, F)$, wobei $A-F$ gerade die Punkte sind, die zu einem bestimmten Zeitpunkt t_x die konvexe Hülle beschreiben, siehe Abbildung 2.

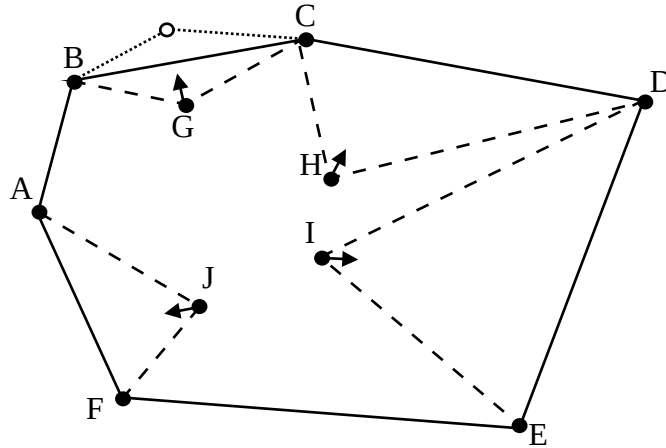


Abbildung 2: die konvexe Hülle lässt sich kombinatorisch durch die obere (v. L. n. R.) und untere (v. R. n. L) konvexe Kette der Punkte beschreiben. Der weiße Punkt verdeutlicht die nächste Änderung der konvexen Hülle durch G .

Die Idee der kinetischen Datenstrukturen ist es, nur Ereignisse, die die zu wartende Funktion ändern können, zu berücksichtigen. Dies ist machbar mit Hilfe von Zertifikaten. Zertifikate sind algebraische Bedingungen. Solange alle Zertifikate gültig sind, ändert sich an der Konfigurationsfunktion nichts, die kombinatorische Beschreibung bleibt dieselbe. Für die konvexe Hülle im Zweidimensionalen wäre die einzig nötige Art von Zertifikat: "Drei Punkte dürfen nicht kollinear werden". Die Zertifikate bilden somit, solange

Position	Zertifikat-Typ	Zeit	Ereigniss
1	3 Punkte kollinear	$t_0 + 20$	BGC kollinear
2	3 Punkte kollinear	$t_0 + 40$	AJF kollinear
3	3 Punkte kollinear	$t_0 + 50$	CHD kollinear
4	3 Punkte kollinear	$t_0 + 70$	EID kollinear

Tabelle 1: Die nächsten vier Ereignisse in der Ereignisschlange. Aus Gründen der Übersicht werden nicht alle künftigen Ereignisse bei gegebenem Flugplan und Geschwindigkeit berücksichtigt.

sie eingehalten werden, einen Beweis dafür, dass die Konfigurationsfunktion (hier die Beschreibung der konvexen Hülle) korrekt ist. Ein Zertifikat hat eine Lebenszeit, da es aufgrund der Bewegung der Objekte irgendwann auslaufen kann. Diese Zertifikatfehler heißen Ereignisse und können, hat man den Flugplan der Objekte, vorausberechnet werden. Es ist weiterhin erlaubt, dass sich die Flugpläne ändern, oder dass sie nur teilweise bekannt sind. Im ersten Fall müssen alle Zertifikate, welche das Objekt mit geändertem Flugplan referenzieren, aktualisiert werden. Im letzten Fall kann ein Zertifikat generiert werden, das für einen gewissen Zeitraum Sicherheit schafft, indem es frühzeitig, vor einer möglichen Zertifikat-Verletzung, fehlschlägt (geht nur, wenn es eine Maximalgeschwindigkeit für Objekte gibt). Dies kann wiederholt werden bis ein neuer Flugplan bekannt ist. In jedem Fall müssen alle bei einem Ereignis beteiligten Objekte nach der Verarbeitung ihre anderen Zertifikate prüfen. So müssten bei unserem Beispiel aus Abbildung 2, nachdem G teil der konvexen Hülle geworden ist, alle künftigen Ereignisse, in denen B , G und C vorkommen, geprüft werden. Alle Ereignisse werden in einer Ereignisschlange nach Zeiten des Fehlers sortiert, siehe Tabelle 1. Durch die Ereignisschlange existiert somit ein diskreter Zugang zu den Zeitpunkten, an denen möglicherweise Änderungen vorgenommen werden müssen. Es gibt vier Kriterien, mit Hilfe derer die Qualität einer KDS gemessen wird:

- Das *Ansprechverhalten* einer KDS ist gut, wenn der für die Aktualisierung der KDS benötigte Zeitbedarf nach einem Zertifikat-Fehler gering ist.
- Eine KDS ist *effizient*, wenn die Anzahl der Ereignisse im Worse Case asymptotisch in der gleichen Größenordnung ist, wie die Anzahl der Änderungen der Konfigurationsfunktion.
- Eine KDS gilt als *kompakt*, wenn die Anzahl an Ereignissen, die je gleichzeitig in der Ereignisschlange sind, klein ist.
- Eine KDS ist *lokal*, wenn sie leicht aktualisiert werden kann, wenn sich ein Flugplan ändert.

Das vorgestellte Konzept der kinetischen Datenstrukturen ist vielseitig anwendbar. In unserem Fall geht es um Kollisionserkennung, welche in Bezug auf die Effizienz eine Ausnahme darstellt. Die intuitive Konfigurationsfunktion wäre eine Binäre, die nur True (keine Kollision) oder False (Kollision) zurückgeben kann. Da sich unsere Konfigurationsfunktion, je nach Einsatzgebiet der KDS, im Idealfall nie und maximal nur einmal ändert, wird es schwierig, die Effizienz der vorgestellten Datenstruktur mit der obigen Definition der Effizienz zu vereinen (Es kann natürlich noch andere Einsatzszenarien geben, in denen Kollisionen z. B. eine Richtungsänderung implizieren). Die Autoren können jedenfalls eine obere Schranke für die totale Anzahl der Ereignisse geben.

3 Triangulierung

Durch das Beispiel der KDS für die konvexe Hülle von Punkten wurden die Bestandteile einer KDS erläutert. Wir wenden uns nun dem eigentlichen Thema zu. Gegeben sind k einfache, starre Polygone mit insgesamt N Eckpunkten, welche sich in der Ebene anhand eines Flugplans ab einem Zeitpunkt t_0 bewegen. Es wird eine zusätzliche Struktur benötigt, um überhaupt elementare Zertifikate identifizieren zu können. Auch hier ist es wieder so, dass man die Korrektheit der KDS (keine Kollision) über Dreiecke zertifizieren kann. Wird der Raum zwischen den Polygonen trianguliert, so geht einer Kollision immer ein Vorzeichenwechsel eines Triangulations-Dreiecks voraus. Es ist also möglich, die Bewegungen der Polygone mit Hilfe einer einfachen KDS, aufbauend auf der Triangulierung, zu warten und Kollisionen zu erkennen. Die Zertifikate wären: Triangulations-Dreiecke wechseln nicht ihr Vorzeichen. Mit der Triangulierung des freien Raumes haben wir (wenn vorausgesetzt wird, dass die Polygone sich zum Zeitpunkt t_0 nicht schneiden) einen Beweis für Kollisionsfreiheit, solange sich die Vorzeichen der Dreiecke nicht ändern. Man kann leicht sehen, dass ein Vorzeichenwechsel nicht zwingend eine Kollision bedeutet. Es muss also geklärt werden, wie die Struktur (Triangulation) aktualisiert wird, damit nach einem kollisionslosen Ereignis immer noch ein Beweis für Kollisionsfreiheit existiert. Den Beweis für die Disjunktheit kann man sich noch besser veranschaulichen, wenn man das Duale der Triangulierung betrachtet, siehe Abbildung 3.

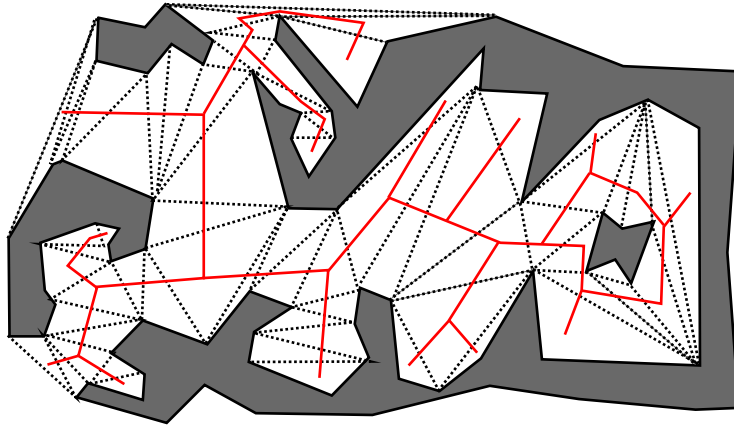


Abbildung 3: Beispiel Szene: Die polygonalen Ketten (rot) bilden einen Beweis für Kollisionsfreiheit, da sie die Polygone separieren.

4 Partitionsdreiecke

Die Autoren schlagen einen wesentlich kompakteren Weg zur Kollisionserkennung vor. Eine initiale Triangulierung wird auch durchgeführt (hierbei ist es egal, welche), es werden aber einige Änderungen an ihr vorgenommen. Der freie Raum zwischen den Polygonen wird zuerst, mit Hilfe der Triangulierung, in Partitionsdreiecke und Korridore unterteilt. Die Korridore entstehen durch das Entfernen der Partitionsdreiecke und werden nochmal unterteilt in Pfade und Taschen, welche beide ein weiteres mal in Pseudodreiecke unterteilt werden.

Angenommen, es sind $k + 1$ ($k \geq 2$) disjunkte polygonale Objekte (inklusive eines isolierten Punktes in der Unendlichkeit) gegeben. Der Punkt in der Unendlichkeit wird gebraucht, um die äußeren Polygone ebenfalls durch Korridore und Partitionsdreiecke beschränken zu können.

- Eine Kante (der Triangulierung) im freien Raum heißt Freiraumschnitt, wenn ihr Inneres komplett im freien Raum liegt.
- Ein Schnitt heißt produktiv, wenn er zwei unterschiedliche Objekte miteinander verbindet, oder er den freien Raum in zwei Regionen teilt, die beide nicht einfach verbunden sind. Siehe Abbildung 4.
- Eine Region des freien Raumes ist einfach verbunden, wenn sie keine Löcher (Polygone/Objekte) enthält. Eine unproduktive Kante unterteilt den Raum in einen Teil, der einfach verbunden ist, genannt Tasche, und einen, der nicht einfach verbunden ist (die Seite, auf der der Punkt im Unendlichen liegt).
- Ein Dreieck, welches aus produktiven Schnitten besteht und vital ist (Inneres ist einfach verbunden), heißt Partitionsdreieck. Es ist möglich, dass alle drei Endpunkte des Dreiecks zu einem Objekt gehören. Siehe Abbildung 5.
- Eine einfach verbundene Region des freien Raumes heißt Korridor, wenn sie von zwei Grenzketten und zwei Schnitten (welche die Endkanten des Korridors bilden) beschränkt wird.
- Ein Korridor ist degeneriert, wenn seine beiden Grenzketten nur noch aus je einem Vektor bestehen. Er ist vital, wenn seine beiden Grenzketten disjunkt sind. Siehe Abbildung 6.

Das folgende Lemma und das daraus resultierende Korollar zeigen, dass eine maximale Anzahl von Partitionsdreiecken den freien Raum in gültige Korridore aufteilt.

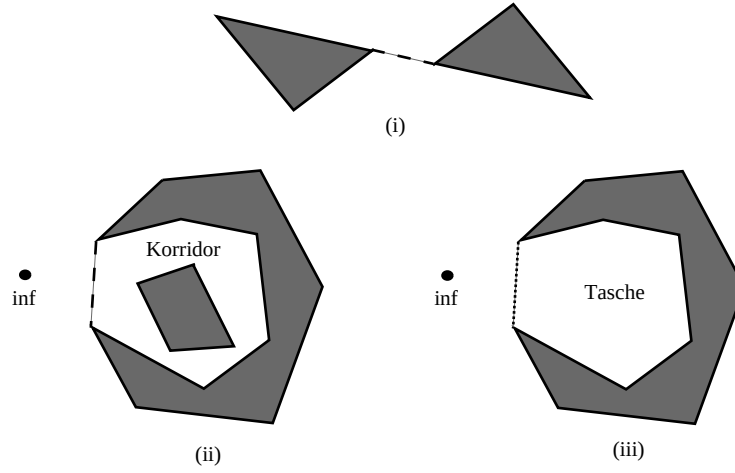


Abbildung 4: (i) und (ii) produktiver Schnitt, (iii) unproduktiver Schnitt.

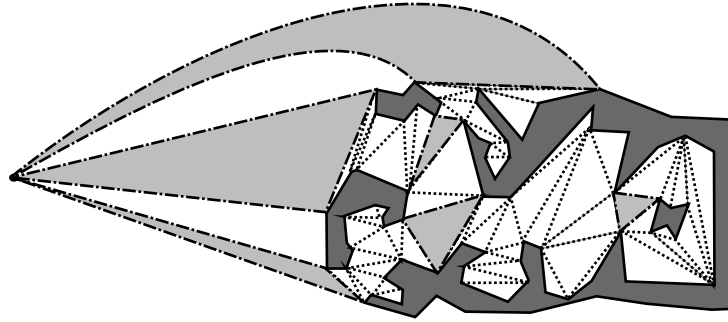


Abbildung 5: Beispielszene mit angedeutetem Punkt in der Unendlichkeit , initialer Triangulierung und hellgrau hinterlegten Partitionsdreiecken.

Lemma 1 *Jede Komponente des freien Raumes, welche durch das Entfernen einer Sammlung von inner-disjunkten produktiven Schnitten entsteht, enthält entweder ein Partitionsdreieck oder formt einen Korridor.*

Beweis. Die obige Aussage können wir als folgenden prädikatenlogischen Ausdruck schreiben:

$$\forall R : \text{containsPT}(R) \text{ XOR } \text{Corridor}(R) \quad (1)$$

R bezeichnet eine Komponente des freien Raumes, welche durch das Entfernen inner-disjunkter produktiver Schnitte entsteht, siehe Abbildung 7. Man beachte, dass in jeder Szene, in der noch keine Schnitte entfernt wurden,

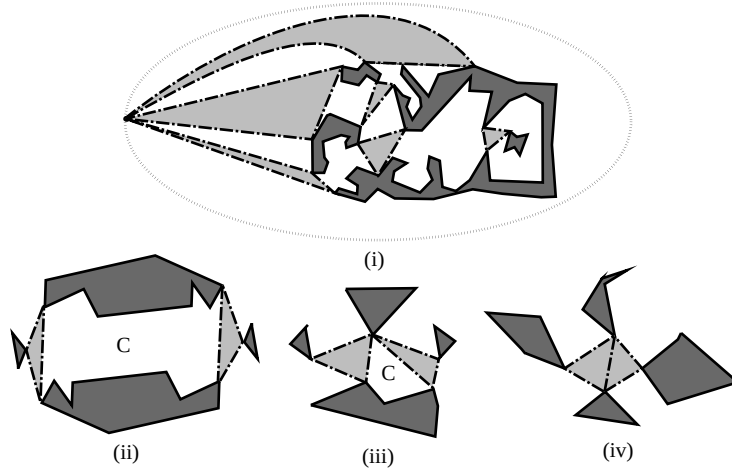


Abbildung 6: (i) weiße Flächen sind Korridore, (ii) normaler Korridor, (iii) halb-degenerierter Korridor und (iv) degenerierter Korridor.

mindestens ein Partitionsdreieck existiert, da wir mindestens zwei Polygone und den Punkt in der Unendlichkeit voraussetzen. Desweiteren kann eine Komponente des freien Raumes, welche ein Partitionsdreieck enthält, kein Korridor sein, da es in diesem Fall drei polygonale Grenzkanten gäbe, siehe Abbildung 7. Ein Korridor ist jedoch gerade durch zwei Polygonale Grenzkanten definiert. Somit ist klar das jede zulässige Szene anfangs, wenn noch keine Schnitte entfernt wurden, gültig ist und Gleichung 1 erfüllt (enthält ein Partitionsdreieck und formt keinen Korridor).

Wir führen die Negierung von Gleichung 1:

$$\begin{aligned} \exists R : (&containsPT(R) \text{ AND } Corridor(R)) \text{ OR} \\ &(\neg containsPT(R) \text{ AND } \neg Corridor(R)) \end{aligned} \quad (2)$$

zum Widerspruch. R entsteht aus größeren Komponenten des freien Raumes durch das Entfernen von produktiven Schnitten. Da R minimal ist, können wir annehmen, dass die Komponente $R+$ aus der R entstanden ist (Zweiteilung von $R+$) entweder ein Partitionsdreieck enthält oder einen Korridor bildet. Es gibt also zwei Fälle.

Fall A: Existiert in $R+$ ein Partitionsdreieck, so kann R entweder auch ein Partitionsdreieck enthalten, oder nicht. Enthält R ein Partitionsdreieck, so kann es keinen Korridor bilden, wie bereits oben gezeigt wurde. Enthält R kein Partitionsdreieck, heißt das, dass keine drei produktiven Schnitte in R existieren, welche ein Dreieck bilden. Daraus folgt, daß es in R genau zwei polygonale Grenzketten gibt, welche durch produktive Schnitte begrenzt sein

müssen. Es handelt sich um einen Korridor. Fall A wurde somit zu einem Widerspruch geführt

Fall B: $R+$ bildet einen Korridor. Daraus folgt direkt, dass kein Partitionsdreieck in R enthalten sein kann, da es schon in $R+$ enthalten gewesen sein müsste. Da R aus $R+$ durch Entfernen eines produktiven Schnittes entstanden ist, muss R ebenfalls einen Korridor bilden. Das ist ein Widerspruch zur gemachten Annahme aus Gleichung 2.

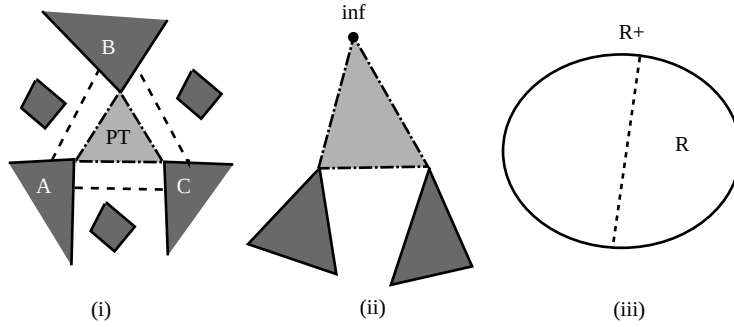


Abbildung 7: (i) Eine Region des freien Raumes (gestrichelt), enthält ein Partitionsdreieck. (ii) Es existiert in jeder Szene ein Partitionsdreieck. (iii) Eine kleinere Komponente R entsteht aus einer größeren.

□

Eine direkte Schlussfolgerung aus dem Lemma ist das folgende Korollar:

Korollar 2 *Das Entfernen einer maximalen Menge von innen-disjunkten Partitionsdreiecken zerlegt den freien Raum in Korridore, deren Endkanten mit Partitionsdreieck-Kanten zusammenfallen.*

Das folgende Theorem ist später hilfreich, wenn wir mit Hilfe der Anzahl der Partitionsdreiecke und Korridore Abschätzungen vornehmen wollen.

Theorem 3 *Jede Triangulierung τ des freien Raumes enthält genau $2k - 2$ Partitionsdreiecke. Die Entfernung dieser Partitionsdreiecke zerlegt den freien Raum in höchstens $3k - 3$ nicht-degenerierte Korridore. Weiterhin, τ gegeben, können die Partitionsdreiecke und Korridore in linearer Zeit in τ identifiziert werden.*

Beweis. Sei t die Anzahl der Partitionsdreiecke in der Triangulierung. Mit Hilfe der Euler-Formel ($v - e + f = c + 1$) kann die Anzahl der Partitionsdreiecke und der Korridore leicht ausgerechnet werden. Da es allerdings degenerierte und halbdgenerierte Korridore geben kann, bauen wir uns den

Extremfall, in dem alle Korridore nicht-degeneriert sind. Dies kann für jede Szene folgendermaßen erreicht werden:

Wenn eine Polygon-Grenzkette eines Korridors degeneriert ist (Kette besteht nur aus einem Eckpunkt), so tauschen wir den Eckpunkt mit einer Kante der Länge 0. Auf diese Weise werden alle degenerierten/halbd degenerierten Korridore zu nicht-degenerierten Korridoren, und die Partitionsdreiecke werden an ihren Ecken disjunkt, siehe Abbildung 8.

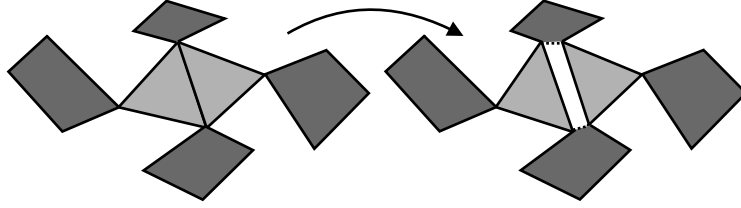


Abbildung 8: Ein degenerierter Korridor wird durch zwei Kanten der Länge 0 zu einem normalen Korridor.

Die Partitionsdreiecke teilen somit (wegen ihrer Disjunktheit) die Objekt-Grenzkanten der Korridore in $3t$ polygonale Ketten auf, und jeder Korridor ist durch 2 Partitionsdreiecke und 2 Polygon-Grenzketten beschränkt. Dieser zusammenhängende planare Graph, welcher $3t$ Knoten (Partitionsdreieck-Ecken), $6t$ Kanten ($3t$ Partitionsdreieck-Kanten, $3t$ Polygon-Grenzkanten), $t + k + 1 + \frac{3t}{2}$ Flächen (t Pseudodreieck Flächen, $k + 1$ Objekt-Flächen, $\frac{3t}{2}$ Korridore) und eine Komponente hat, lässt sich durch die Euler-Formel in einen Bezug bringen und nach t auflösen:

$$\begin{aligned} 3t - 6t + t + k + 1 + \frac{3t}{2} &= 2 \\ t &= 2k + 2 \end{aligned}$$

Die maximale Anzahl an Korridoren (es handelt sich wirklich um die obere Schranke, da durch die Umformung alle Korridore nicht-degeneriert sind) kann nun wiederum durch Einsetzen von $t = 2k - 2$ ermittelt werden:

$$\begin{aligned} \text{maximale Anzahl Korridore} &= \frac{3t}{2} \\ &= \frac{3 * (2k - 2)}{2} \\ &= 3k - 3 \end{aligned}$$

Die zugehörigen Partitionsdreiecke und Korridore können in linearer Zeit in τ (= Anzahl Dreiecke der Triangulierung) identifiziert werden, da die Kan-

ten in linearer Zeit in Polygongrenzkanten, produktive Schnitte und unproduktive Schnitte eingeteilt werden können. Polygonale Grenzkanten haben die Eigenschaft, dass sie nur ein inzidentes Triangulationsdreieck haben. Dieser Test geht in konstanter Zeit benutzt man z. B. eine Doubly Connected Edge List zur Speicherung der Dreiecke. Um in linearer Zeit herauszufinden, ob ein Schnitt produktiv ist oder nicht, müssen wir rekursiv die anderen Kanten des inzidenten Dreiecks identifizieren. Stoßen wir irgendwann auf einen sicheren produktiven Schnitt (Schnitt zwischen zwei unterschiedlichen Objekten), so sind alle bisherigen Schnitte auf dem Pfad ebenfalls produktiv. Stoßen wir auf Polygon-Grenzkante, so ist jeder bisherige Schnitt unproduktiv. Jede Kante wird nur einmal angefasst, somit ergibt sich eine lineare Laufzeit für das Identifizieren der Kanten. Es muss danach für jedes Dreieck getestet werden, ob es aus drei produktiven Schnitten besteht. Daraus ergibt sich $O(\tau)$ für die Identifizierung von Partitionsdreiecken und somit auch Korridoren. $\square$

Vermutung 4 *Jedes Objekt P ist von einer alternierenden Sequenz von Korridoren und Partitionsdreiecken umgeben, wobei P mindestens einen Eckpunkt zu jedem Partitionsdreieck und jedem Korridor beisteuert.*

Diese Beobachtung folgt direkt aus Korollar 2. Abbildung 9 verdeutlicht den Sachverhalt.

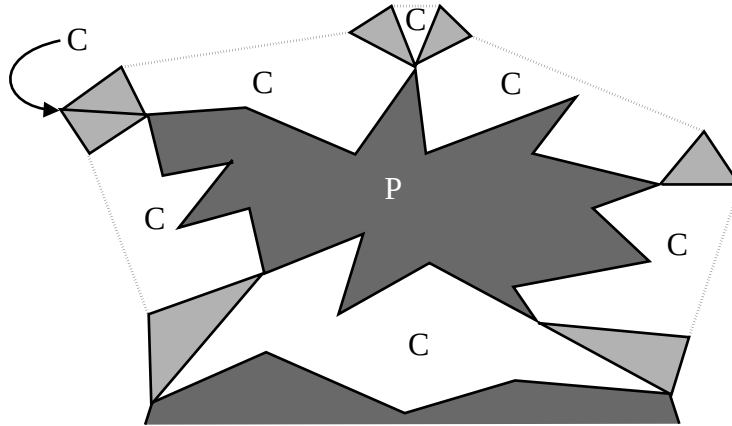


Abbildung 9: Jedes Polygon P ist von einer alternierenden Folge von Korridoren und Pseudodreiecken umgeben.

Theorem 5 *Die topologische Struktur einer gegebenen Konfiguration von Polygonen ist invariant unter den Bewegungen der Polygone, welche keine Dreieck-Zertifikate verletzen (keine Vorzeichenwechsel).*

Aus allen bisherigen Erkenntnissen zusammengekommen ergibt sich Abbildung 10 ¹.

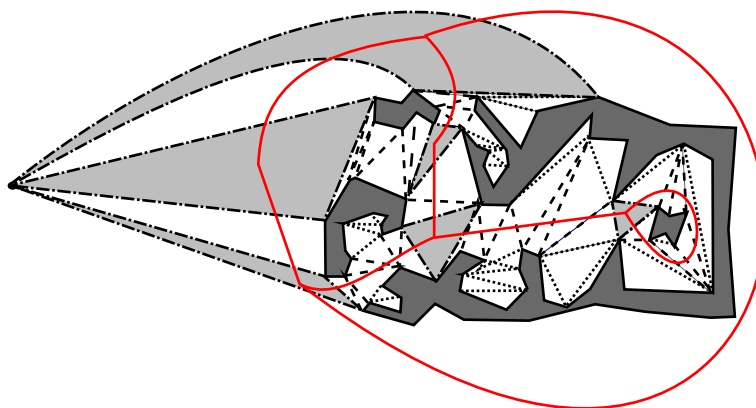


Abbildung 10: Beispielszene mit eingezeichnetem Beweis der Disjunktheit (rot). Es fällt auf, dass nur diejenigen Kanten der Korridore geschnitten werden, welche Brücken sind (Brücken und Saiten werden im nächsten Abschnitt definiert).

¹gepunktete Linien = Saiten, gestrichelte Linien = Brücken, durchgezogene Linien = Polygon-Grenzkanten, punkt-gestrichelte Linien = Partitionsdreieck-Kanten

5 Korridore

Wir haben im vorherigen Abschnitt eine Unterteilung des freien Raumes in Partitionsdreiecke und Korridore vorgenommen. Würde man in den Korridoren nur die Dreiecke der Triangulierung zertifizieren, hätte man nichts gewonnen. Ein Korridor wird weiter in einen Pfad und ein oder mehrere Taschen unterteilt und diese wiederum in Pseudodreiecke (müssen aus der vorhandenen Triangulation erst gebaut werden). Der Grund für die Unterteilung ist, dass sich dadurch Zertifikate sparen lassen, und das sich die Komplexität der Korridore mit Hilfe der Pseudodreiecke beschränken lässt, wie man weiter unten sehen wird.

Ein Pseudodreieck ist begrenzt durch drei konkave Ketten, welche prinzipiell beliebig viele eigene Punkte/Segmente haben dürfen und sich an drei Endpunkten, den Ecken des Pseudodreiecks, treffen. Die Ketten haben die Eigenschaft, dass ihre Innenwinkel ≥ 180 Grad sind, die Innenwinkel der Ecken sind < 180 und > 0 Grad, siehe Abbildung 11. Ein Pseudodreieck ist vital, wenn seine konkaven Ketten keine echten Schnittpunkte haben (sie schneiden sich lediglich an den Eckpunkten). Vitale Pseudodreiecke sind sternförmig; ein gewöhnliches Dreieck ist ein Spezialfall eines Pseudodreiecks. Die Zertifikate der Pseudodreiecke sind somit gefunden, sie sind gerade die oben erwähnten Zwangsbedingungen (die Grad-Bedingungen) und zertifizieren die Vitalität. Es gibt zwei Arten von Zertifikaten für Pseudodreiecke: Eckzertifikate (< 180 und > 0 Grad) und Seitenzertifikate (≥ 180 Grad).

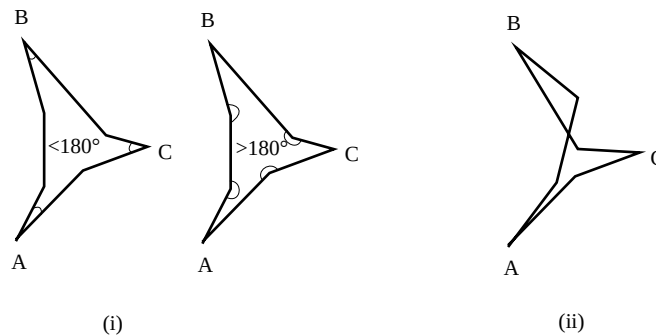


Abbildung 11: (i) Links sind die Ecken des Pseudodreiecks, rechts die Punkte der Seitenketten durch Winkel hervorgehoben. (ii) Ein nicht vitales Pseudodreieck.

Um die Korridore in einen Pfad und eine gewisse Anzahl von Taschen aufteilen zu können, wird die vorhandene Triangulation in ihnen benutzt (siehe Abbildung 12). Korridore werden durch Partitionsdreiecke definiert, dies ist bereits geschehen. Die Kanten einer Triangulierung lassen sich in zwei Arten einteilen.

Es gibt Brücken und Saiten. Eine Brücke verbindet die beiden Grenzketten eines Korridors, eine Saite ist eine Verbindung von einem Eckpunkt einer Grenzkette zu einem anderen Eckpunkt derselben Grenzkette. Es ist zu beachten, dass die beiden Grenzketten zum gleichen Objekt gehören können. Es ist außerdem zu beachten, dass die Endkanten eines Korridors auch Brücken, und normale Polygon-Grenzkanten auch Saiten sind. Alle Brücken bis auf die zu den End-Kanten des Korridors korrespondierenden heißen ordentliche Brücken. Alle Saiten bis auf die zu den Segmenten der Grenzketten korrespondierenden heißen ordentliche Saiten (siehe Abbildung 13). Diese bewusste Unterscheidung wird erst später benötigt.

Die zu den Brücken adjazenten Dreiecke der Triangulierung bilden einen Pfad von Dreiecken von Endkante zu Endkante eines Korridors. Es ist klar, dass es wirklich ein zusammenhängender Pfad ist, denn er wird durch alle Brücken definiert. Dieser Sachverhalt lässt sich schön sehen, wenn das Duale der Brücken-adjazenten Dreiecke betrachtet wird (siehe Abbildung 10).

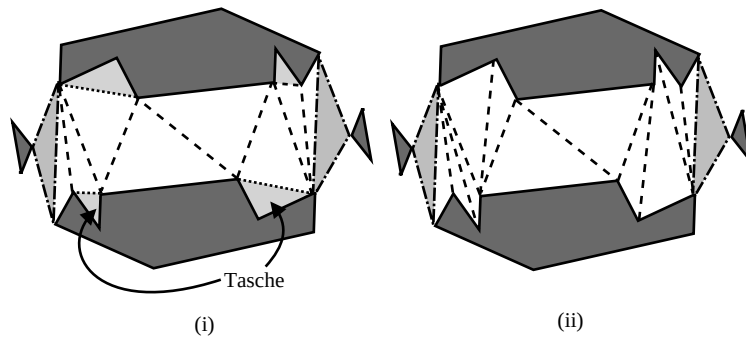


Abbildung 12: (i) Triangulation mit Taschen, (ii) Triangulation ohne Taschen.

Ein Korridor ist vital, wenn es einen vitalen Pfad in ihm gibt. Ein vitaler Pfad ist analog zum vitalen Korridor zu definieren, einziger Unterschied ist, dass ein vitaler Pfad nicht mehr zwingend durch zwei polygonale Grenzketten definiert wird, sondern durch zwei Pfad-Grenzketten, welche sowohl ordentliche Saiten als auch Polygon-Grenzkanten enthalten können. Die beiden Grenzketten eines vitalen Pfades müssen disjunkt sein. Da ein Pfad von Endkante zu Endkante geht und zusammenhängend ist, kann man die Vitalität des Korridors auf die Vitalität seines Pfades reduzieren.

Diese Beobachtung ist insofern wichtig da, zur Zertifizierung eines Korridors nicht mehr dessen Taschen beachtet werden müssen. Die Teile eines Korridors, die nicht zum Pfad gehören, nennt man Taschen. Entfernt man den Pfad aus einem Korridor, so bleiben die Taschen übrig. Da die Objekte als starr vorausgesetzt wurden, können Taschen ohne weiteres nicht degenerieren. Taschen treten nur in Erscheinung, wenn Objekte in sie eindringen.

Um einen Korridor zu zertifizieren, spielen die Taschen also keine Rolle. Es werden schonmal einige Zertifikate gespart.

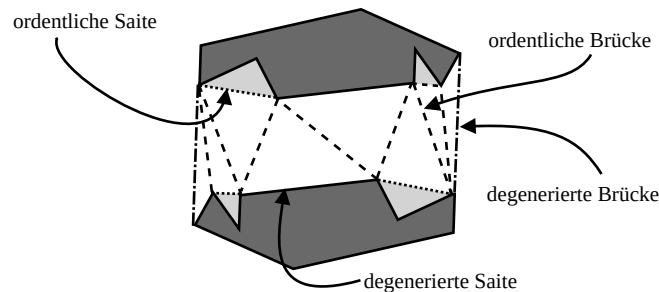


Abbildung 13: Die vier unterschiedlichen Kanten-Typen eines Korridors.

Die Vitalität der Pfade an sich können durch ihre bildenden Dreiecke zertifiziert werden. Der Umbau der Dreiecke der initialen Triangulation eines Korridors in Pseudodreiecke ändert nichts an der grundlegenden Struktur der Pfade:

Alle zu einem Pfad gehörenden Dreiecke enthalten nach Definition eines Pfades genau zwei Brücken. Zwei Pfad-Dreiecke sind entweder disjunkt oder schneiden sich an genau einer gemeinsamen Brücke. Jede ordentliche Brücke gehört zu genau zwei Pfad-Dreiecken, und jede Endkante eines Pfades gehört zu genau einem Pfad-Dreieck und einem Partitionsdreieck. Diese Aussagen bleiben für Pseudodreiecke ebenso gültig.

Auch die Dreiecke der Taschen der Initialen Triangulation werden in Pseudodreiecke umgebaut. Dies trägt zwar nichts zur Zertifizierung eines Korridors bei, aber es erlaubt eine effizientere Handhabung, wenn Objekte in Taschen eindringen. Die Taschen werden in einem solchen Fall verkleinert, oder komplett Teil des Korridors, wie weiter unten erläutert wird.

5.1 Pseudotriangulierung von Pfaden

Jetzt, wo bekannt ist was ein Pfad ist, wie man ihn bestimmt und warum wir ihn für spätere Zwecke pseudotriangulieren wollen, brauchen wir ein Verfahren, um selbiges zu erreichen. Pseudodreiecke können, obwohl die Anzahl der Segmente ihrer Seitenketten nicht beschränkt ist, genau wie normale Dreiecke in konstanter Zeit zertifiziert werden. Es gibt nämlich insgesamt nur drei bis höchstens vier Eckpunkte, deren Winkel sich ändern können und welche somit zu einem nicht-vitalen Pseudodreieck führen können. Mit Eckpunkten sind in diesem Fall nicht nur die drei echten Ecken des Pseudodreiecks gemeint, sondern auch die Punkte auf der konkaven Seitenketten. Sind zwei Brücken adjazent so können sich drei Winkel ändern, sonst vier. An den anderen Winkeln eines Pseudodreiecks tut sich nichts, da diese inzident

zu Saiten sind und es sich hier um starre Polygone handelt (siehe Abbildung 14). Somit sind maximal vier (minimal drei, wenn zwei Brücken einen Endpunkt teilen) Zertifikate pro Pseudodreieck ausreichend, um dessen Vitalität zu zertifizieren. Normale Triangulations-Dreiecke in den Korridoren lassen sich in eine kleinere Anzahl Pseudodreiecke umformen, wie weiter unten erläutert wird. Somit wird eine deutliche Verbesserung durch eine maximale Pseudotriangulierung (=minimale Anzahl an Pseudodreiecken in einem Korridor) erreicht, da die Anzahl der benötigten Zertifikate zur Zertifizierung eines Pfades, und somit auch eines Korridors, stark reduziert wird.

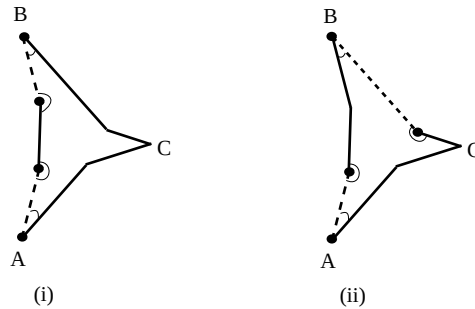


Abbildung 14: Winkel die sich ändern können in einem (i) Eck-Objekt-Pseudodreieck und einem (ii) Objekt-Pseudodreieck. Es können sich nur die Winkel ändern, deren Punkte inzident zu Brücken sind.

Durch eine Pseudotriangulierung ändert sich der Pfad aus der Triangulierung in der Regel, da Brücken der initialen Triangulierung rausgenommen werden können. Im Gegenzug müssen neue Saiten eingebaut werden, damit zulässige Pseudodreiecke entstehen. Das Herausnehmen von Brücken ist von Fall zu Fall möglich, da die Seitenketten der Pseudodreiecke Innenwinkel ≥ 180 Grad haben. Die initiale Triangulierung wird zuerst nur auf diese Weise verändert, siehe Abbildung 15 und Abbildung 16. Dies geht in konstanter Zeit für jede Brücke, da nur ihre adjazenten Polygon-Grenzkanten zulässige Winkel haben müssen.

Es hängt von der initialen Triangulierung und der Komplexität des Korridors ab, ob sich bei diesem ersten Schritt in Richtung maximale Pseudotriangulierung schon viel tut. Einige weitere Schritte sind nötig, um zu einer minimalen Anzahl von Pseudodreiecken in einem Korridor zu kommen. Für eine weitere Zusammenfassung der Dreiecke/Pseudodreiecke unterscheiden wir Objekt-Eck-Pseudodreiecke und Objekt-Pseudodreiecke. Es können maximal zwei Objekte an Korridore angrenzen. Die Objekte P und Q stellen gerade die polygonalen Grenzketten bereit. Daraus ergeben sich vier mögliche Arten von Pseudodreiecken (siehe auch Abbildung 17):

- P -Eck-Pseudodreiecke haben nur auf einer ihrer drei konvexen Ketten

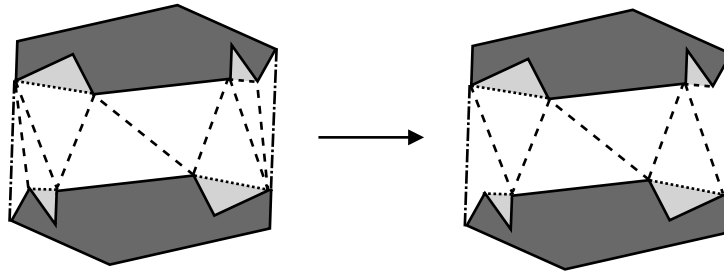


Abbildung 15: Durch Weglassen von Brücken können Pseudodreiecke entstehen.

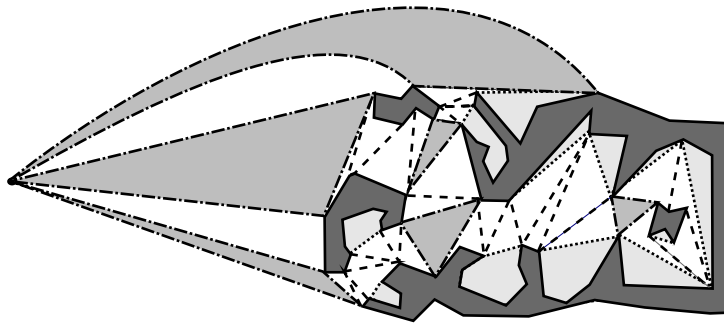


Abbildung 16: Die Beispielszene mit einigen weggelassenen Brücken, allzu viel hat sich noch nicht geändert.

Brücken. Auf der gleichen Kette können auch noch Saiten von Q sein. Die Anderen beiden Ketten bestehen nur aus Saiten von P . (Analog für Q)

- P -Pseudodreiecke haben ihre zwei Brücken auf zwei konvexe Ketten verteilt. Sie haben nur Saiten von P auf der übrigen Kette (Analog für Q).

Zwei Eck-Pseudodreiecke desselben Objekts können nicht adjazent sein, was man gut in Abbildung 18 nachvollziehen kann. Eck-Pseudodreiecke unterschiedlicher Objekte können hingegen adjazent sein, wie auch alle anderen möglichen Kombinationen.

Durch die folgenden beiden Beobachtungen können Pfade, was die Anzahl der Pseudodreiecke in ihnen angeht, verkleinert werden:

Vermutung 6 *Gegeben zwei adjazente P -Pseudodreiecke, so können diese entweder zu einem P -Pseudodreieck verschmolzen, oder zu einem Q -*

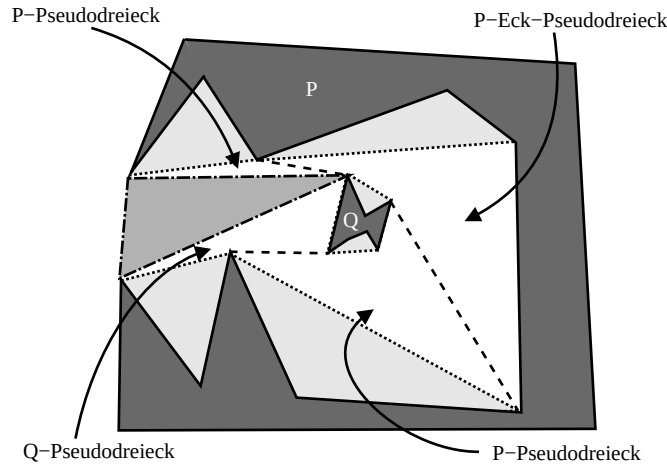


Abbildung 17: Eck-Pseudodreiecke und Objekt-Pseudodreiecke.

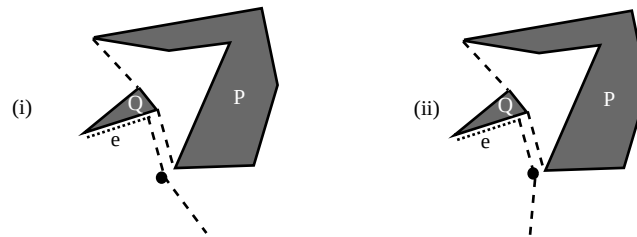


Abbildung 18: Die zwei Möglichkeiten, Eck-Pseudodreiecke aneinander zu legen. In (i) wäre Kante e eine Saite von Q , weswegen es kein P -Eck-Pseudodreieck sein kann. In (ii) würde eine Kante aufgrund der Winkelvorgaben das Objekt Q schneiden.

Pseudodreieck und einem P -Eck-Pseudodreieck transformiert werden. In beiden Fällen verschwindet ein P -Pseudodreieck (siehe Abbildung 19).

Vermutung 7 *Gegeben ein P -Pseudodreieck, welches adjazent zu einem Q -Pseudodreieck ist, so kann die Diagonale zwischen beiden vertauscht werden, um sie jeweils in den anderen Typ umzuwandeln (siehe Abbildung 20).*

Mit Hilfe der beiden Beobachtungen ist es möglich, die Anzahl aller Pseudodreiecke in Abhängigkeit der Anzahl Eck-Pseudodreiecke zu minimieren. Jede beliebige Abfolge von Pseudodreiecken kann, durch die in den Beobachtungen beschriebenen Umwandlungen, in folgende allgemeine Form gebracht werden:

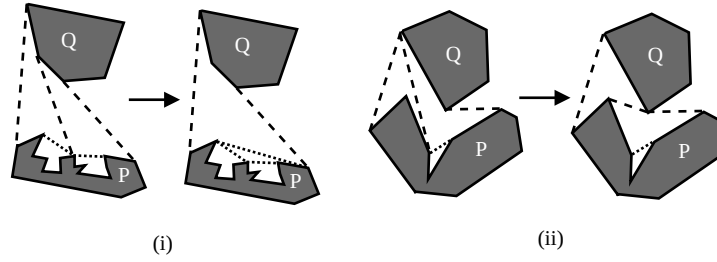


Abbildung 19: Zwei adjazente P -Pseudodreiecke werden (i) zu einem P -Pseudodreieck verschmolzen, (ii) zu einem Q -Pseudodreieck und einem P -Eck-Pseudodreieck transformiert.

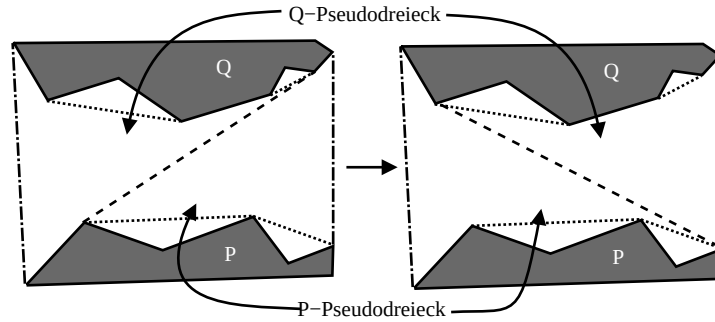


Abbildung 20: Vertauschung des Typs eines P -Pseudodreiecks und eines Q -Pseudodreiecks.

$$C^* \mid \{ P? Q? C+ \}^*$$

Somit kann eine Invariante aufgestellt werden, welche obige allgemeine Form beschreibt und eine minimale Pseudotriangulierung für jedem Zeitpunkt fordert. Bei Umstrukturierungen durch Zertifikatfehler jeglicher Art muss immer geprüft werden, ob die Invariante neu hergestellt werden muss.

Vermutung 8 *Je drei konsekutive Pseudodreiecke in einem Pfad müssen ein Eck-Pseudodreieck enthalten. Außerdem müssen je zwei adjazente Objekt-Pseudodreiecke zu unterschiedlichen Objekten gehören.*

Die Invariante ist von Anfang an zu erfüllen. Nach dem ersten Schritt der Pseudotriangulierung (dem Herausnehmen von Brücken wo möglich) kann mit Hilfe der Verschmelzung, der Transformation und des Austauschs der Diagonalen die Invariante erfüllt werden. Eine direkte Folgerung

aus den Beobachtungen und der resultierenden allgemeinen Form der Lage der vier Pseudodreieck-Typen ist, dass Pfade zwischen Objekten, deren konvexe Hülle disjunkt ist, aus maximal zwei Pseudodreiecken bestehen. Diese Aussage ist korrekt, da sich in solchen Korridoren keine Eck-Pseudodreiecke befinden können. Es ist in diesem Fall schlicht nicht möglich, dass sich zwei Brücken eines Pseudodreiecks auf einer Seitenkette befinden (siehe Abbildung 21).

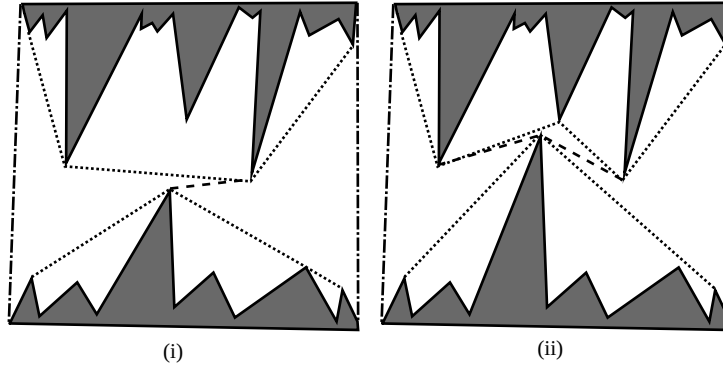


Abbildung 21: (i) Die konvexe Hülle der Objekte ist disjunkt, somit lässt sich der Korridor durch zwei Pseudodreiecke zertifizieren. (ii) Die beiden Objekte haben keine disjunkten konvexen Hüllen, es wird mindestens ein Eck-Objekt-Pseudodreiecke benötigt, um den Korridor zu zertifizieren.

Durch die Invariante ist es nun möglich, die Anzahl der nötigen Zertifikate eines Korridors, durch den minimalen Link-Separator, zu beschränken. Einen minimalen Link-Separator kann man sich als ein Gummiband vorstellen, welches von Endkante zu Endkante eines Korridors gespannt wird. Die geraden Abschnitte des Link-Separators sind seine Segmente, die Punkte an denen er abknickt sind seine Eckpunkte. Ein Gummiband hätte offensichtlich eine minimale Anzahl an Knicken, und somit Segmenten.

Lemma 9 *Um die Vitalität eines Korridors C zu zertifizieren, welcher durch polygonale Ketten π_P und π_Q beschränkt ist, werden $\theta(\kappa)$ elementare Zertifikate gebraucht. κ ist hierbei die Größe eines minimalen Link-Separators von π_P und π_Q , welche die End-Kanten von C besuchen.*

Beweis. Ein Pfad hat höchstens fünf mal so viele Pseudodreiecke (Eck- und Objekt-Pseudodreiecke), wie er Eck-Pseudodreiecke enthält. Es gibt nämlich pro Eck-Pseudodreieck maximal vier Objekt-Pseudodreiecke, was die Pfad-Invariante über die Zeit gewährleistet. Hier ein Beispiel (links und rechts müssen Eck-Pseudodreiecke folgen):

$$P_{tria}Q_{tria}Eck_{tria}P_{tria}Q_{tria}$$

Da jedes Pseudodreieck maximal vier Zertifikate benötigt, läßt sich ein Pfad (und somit der Korridor des Pfades) mit einer Menge von Zertifikaten zertifizieren, die proportional zur Anzahl der Eck-Pseudodreiecke wächst. Weiter gibt es mindestens so viele Segmente in einem minimalen Link-Separator, wie es Eck-Pseudodreiecke gibt.

Die Mittelpunkte der Brücken eines Pfades lassen sich, da es sich um Pseudodreiecke handelt, welche sternförmig sind, immer mit maximal zwei geraden Segmenten verbinden (siehe Abbildung 22). Das gilt sowohl für Eck-Pseudodreiecke, als auch für Objekt-Pseudodreiecke. Somit ist die Anzahl der Segmente eines minimalen Link-Separators maximal zehn mal die Anzahl der Eck-Pseudodreiecke (maximal 5 mal so viele Pseudodreiecke wie Eck-Pseudodreiecke und maximal zwei Segmente pro Pseudodreieck). Es ergibt sich die lineare Komplexität in Abhängigkeit der Eck-Pseudodreiecke. $\square$

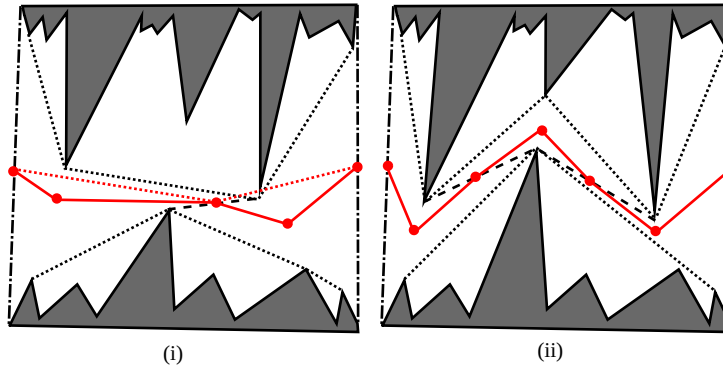


Abbildung 22: Es gibt immer einen zweisegmentigen Weg von Brücke zu Brücke eines Pseudodreiecks. (i) Die Mittelpunkte der Brücken lassen sich auch bei zwei Objekt-Pseudodreiecken nicht immer direkt verbinden. (ii) In einem Objekt-Eck-Pseudodreieck werden immer zwei Segmente benötigt.

Direkt aus dem obigen Lemma folgt das nächste Korollar:

Korollar 10 *Die totale Anzahl der elementaren Zertifikate, welche gebraucht werden, um die Vitalität aller Partitionsdreiecke und Korridore zu zertifizieren (also die Disjunktheit aller Objekte), ist $O(k + \Sigma_P \kappa_P)$, wobei κ_P die Länge eines minimalen Link-Zyklus um P ist.*

Beweis. Ein minimaler Link-Zyklus κ_P ist die Summe der Länge der minimalen Link-Separatoren der umschließenden Korridore eines Polygons P :

$\kappa_P = \Sigma_{\text{Korridore}(P)}\kappa$. Ein minimaler Link-Separator eines Korridors mit κ Segmenten beschränkt gerade die Anzahl der elementaren Zertifikate, die nötig sind, um den Korridor zu zertifizieren, auf $O(\kappa)$. Ein minimaler Link-Zyklus κ_P um ein Polygon P ist somit durch $O(\Sigma_{\text{Korridore}(P)}\kappa)$ nach oben beschränkt. Dies ist eine obere Schranke für die Anzahl der nötigen Zertifikate aller Korridore um ein Polygon P . Diese können für alle Polygone aufsummiert werden, da jeder Korridor nur an zwei Polygone angrenzt. Der Faktor 2 in der Abschätzung fällt raus, und die obere Schranke ist $O(\Sigma_P \kappa_P)$, die Summe aller minimalen Link-Zyklen über alle Polygone. Der Faktor k kommt von den $2k - 2$ Zertifikaten, die für die Partitionsdreiecke gebraucht werden. Es ergibt sich obige Abschätzung. $\square$

Somit haben wir nicht mehr $O(N)$ viele Zertifikate, wie bei der Benutzung von einfachen Dreieckszertifikaten, sondern $O(k + \Sigma_P \kappa_P)$. Wie bereits angesprochen führen wir die Pseudotriangulierung auch für Taschen durch, was im nächsten Abschnitt erläutert wird.

5.2 Pseudotriangulierung von Taschen

Die zweite Komponente, in die ein Korridor zerlegt wird, sind die angesprochenen Taschen. Werden aus einem Korridor die Pfade entfernt, bleiben die Taschen abseits vom Pfad übrig. Sie tragen nicht zur Zertifizierung des Korridors bei, müssen aber auch eine Struktur aufweisen, da Objekte in sie eindringen können. Es liegt nahe, auch die Dreiecke der Taschen in Pseudodreiecke umzubauen, damit die Umstrukturierungen beim Betreten eines Objektes effizient gehandhabt werden kann. Die Pseudotriangulierung zählt sich bei der Wartung der KDS aus, was im nächsten Kapitel erläutert wird.

Die Saiten einer Taschen können als Binärbaum mit ausgezeichneter Wurzel gespeichert werden (siehe Abbildung 24). Die erste Saite der Tasche heißt Extrem-Saite. Jede Saite hat zwei Söhne, welche auch wieder ordentliche Saiten oder Polygonkanten sind. Auch durch das Umbauen der Dreiecke in Pseudodreiecke bleibt diese Struktur erhalten. Da Taschen nur Saiten beinhalten (keine Brücken, diese sind ja alle im Pfad des Korridors enthalten), ändert sich die Vitalität der zugrundeliegenden Dreiecke/Pseudodreiecke nicht.

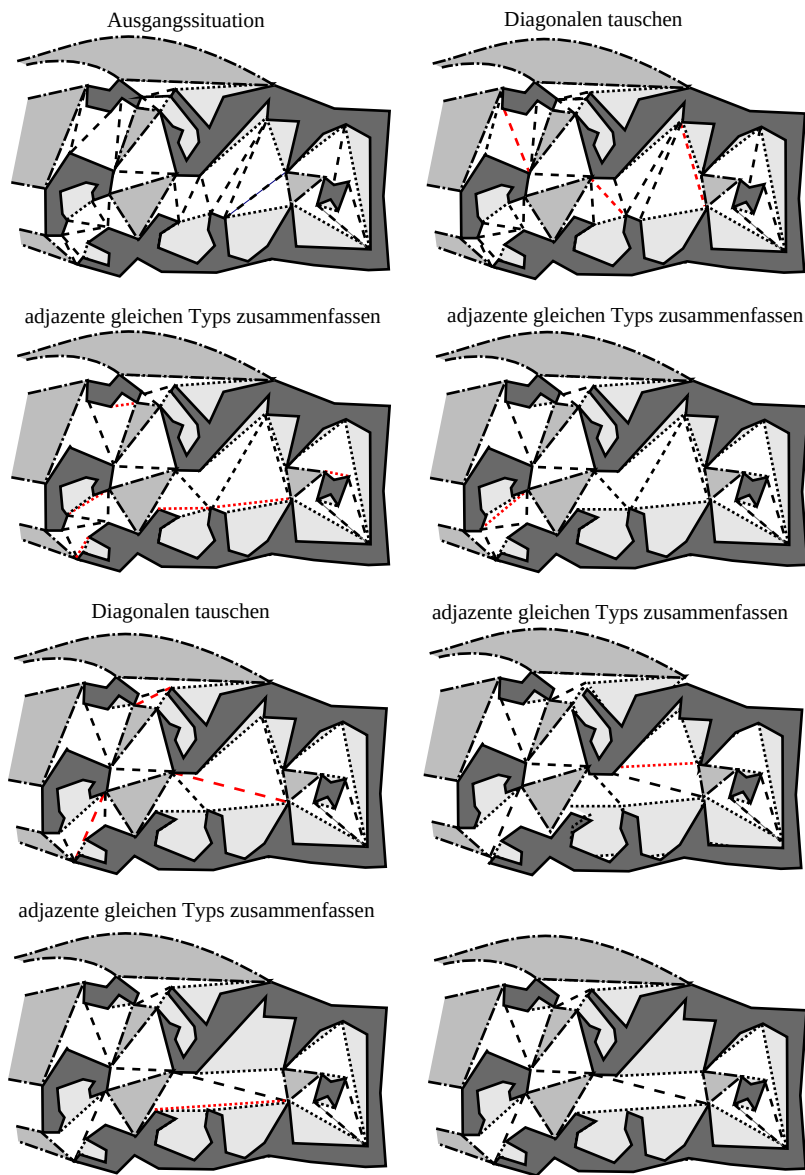


Abbildung 23: Die Beispielszene wird wie oben beschrieben in die gewünschte Struktur umgebaut.

6 Wartung

Den initialen Aufbau unserer Struktur haben wir erreicht. Er kann in Abbildung 23 nachvollzogen werden. Nun kommt es zum eigentlich wichtigsten Teil, der Wartung. Ereignisse (=Zertifikatfehler) in der Ereignisschlan-ge kündigen einen Wechsel der Struktur (gemeint sind Partionsdreiecke und

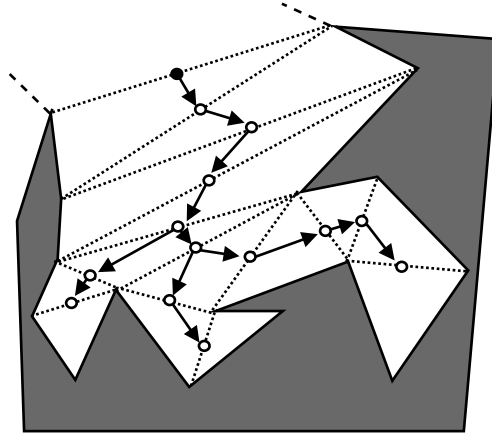


Abbildung 24: Der Saiten-Baum einer Tasche, welcher noch nicht pseudotrianguliert wurde.

Pseudodreiecke) zu einem bestimmten Zeitpunkt an. Wie bereits angesprochen, ist es die Aufgabe einer KDS, nur zu diskreten Zeitpunkten, eben wenn ein Zertifikat ausläuft, einzuspringen und ihre Strukturen in einen Zustand zu bringen, welcher wieder korrekt zertifizierte Objekte hat. Wir nehmen an, dass die Zeiten für Zertifikatfehler vorausberechnet werden können (Flugplan) und dass sich die korrespondierenden Ereignisse in einer Ereignisschlange befinden. Wie wir weiter unten sehen werden, können wir unsere Datenstruktur und unsere Invariante durch Berechnungen an konstant vielen Pseudodreiecken aktualisieren, sollte ein Zertifikat-Fehler eintreten. Das Aktualisieren dieser konstant vielen Pseudodreiecke mit m Grenzkettensegmenten braucht insgesamt $O(\log m)$ Zeit, wenn wir eine Path Hull Data Structure benutzen, um die Ketten zu speichern. Diese Datenstruktur ermöglicht das Finden von gewöhnlichen Tangenten zwischen zwei Ketten in Zeit $O(\log m)$, mehr dazu unten.

Bisher ging es immer nur darum, die Datenstruktur(en) zu warten. Die Ereignisschlange muss ebenso gepflegt werden. Ein abgearbeitetes Ereignis bringt die Ablaufplanung der Warteschlange in der Regel durcheinander, da es Änderungen an der Struktur geben kann, welche auch andere Zertifikate beeinflusst. Bisher wurden für das Updaten der Ereignisschlange noch keine zeitlichen Schranken bestimmt. Dies geschieht im nächsten Paragraphen, hier geht es erstmal nur um die Aktualisierung der Pseudodreiecke und Partitionsdreiecke, und die Einhaltung der Pfadinvariante.

Das korrekte Verarbeiten von Ereignissen kann das Umplatzen eines Partitionsdreiecks und das Löschen oder Einfügen von Pseudodreiecken erfordern. Dies wird weiter unten für jede mögliche Art von Ereignis genau beleuchtet. In jedem Fall kann durch solche Operationen die Invariante ver-

letzt sein. Wann immer das der Fall ist, wird drauf hingewiesen, und die Invariante kann auf dem gleichen Weg wiederhergestellt werden, wie sie oben, zum Zeitpunkt t_0 , das erste mal aufgebaut wurde:

Lemma 11 *Sei ein Pfad gegeben, der die Pfad-Invariante erfüllt, so kann nach einer lokale Änderung (neu eingefügtes Pseudodreieck oder gelöschttes Pseudodreieck) in Zeit $O(\log m)$ ein Umbau durchgeführt werden, welcher die Invariante wiederherstellt. m ist hierbei die Anzahl der Eckpunkte der betroffenen Pseudodreiecke und ihrer unmittelbaren Nachbarn. Der Umbau erfordert die Zerstörung und Generierung einer konstanten Anzahl von Kanten und elementaren Zertifikaten.*

Beweis. Angenommen, nach dem Einfügen eines neuen Pseudodreiecks befinden sich drei konsekutive Objekt-Pseudodreiecke nebeneinander. Wir wissen, dass es nicht mehr sein können, da die Pfad-Invariante jederzeit erfüllt ist. Die Pfad-Invariante schreibt vor, dass sich nie mehr als zwei Objekt-Pseudodreiecke nebeneinander im Pfad befinden (Eck-Pseudodreiecke können immer eingefügt werden, ohne dass die Pfad-Invariante verletzt wird).

O. B. d. A. haben die drei konsekutiven Dreiecke die Form PQP oder PPQ . Ein Tausch der Diagonale zwischen den beiden hinteren Pseudodreiecken der ersten Form produziert die zweite Form PPQ , welche somit die einzige ist, die wir noch berücksichtigen müssen. Die beiden P-Pseudodreiecke können entweder zu einem P-Pseudodreieck verschmolzen werden oder in ein P-Pseudodreieck und ein Q-Eck-Pseudodreieck transformiert werden: PPQ zu PQ oder zu PCQ . Die Invariante ist in jedem Fall erfüllt, jede vorher gültige Folge links und rechts von den drei betrachteten Pseudodreiecken ist auch jetzt wieder zulässig. Es müssen maximal zwei Verschmelzungen/Transformationen/Vertauschungen von Pseudodreiecken durchgeführt werden.

Das Löschen von Objekt-Pseudodreiecken kann die Pfad-Invariante nicht verletzen. Nach dem Löschen eines Eck-Pseudodreiecks aus einem Pfad, der vorher die Invariante erfüllte, kann es maximal vier konsekutive Objekt-Pseudodreiecke geben, welche wie oben zusammengefasst werden können. Links und rechts von einem Eck-Pseudodreieck sind nur jeweils zwei Objekt-Pseudodreiecke erlaubt, danach begrenzen entweder Partitionsdreiecke den Korridor, oder der Korridor geht weiter und es folgen Eck-Pseudodreiecke. O. B. d. A. können, die in Tabelle 2 abgebildeten Fälle, nach dem Löschen eines Eck-Pseudodreiecks auftreten (C sei hier ein Eck-Pseudodreieck). Die maximal nötige Anzahl von Verschmelzungen, Transformationen und Vertauschungen von Pseudodreiecken ist vier.

Mit der Path Hull Structure können die nötigen Tangenten zum Umbau in $O(\log m)$ gefunden werden, wobei m die Anzahl der Eckpunkte der Pseudodreiecke ist. Es sind maximal vier Pseudodreiecke involviert. $\square$

Fall	Situation	1.	2.	3.	4.
1.	PQPQ	PQQP	$PQP \vee \mathbf{PQCP}$	PPQ	$\mathbf{PQ} \vee \mathbf{PCQ}$
2.	PQQP	s. o.			
3.	PQP		s. o.		
4.	PPQ			s. o.	
5.	QP				

Tabelle 2: Mögliche Ausgangssituationen und deren Umformungen bei gelöschtem Objekt-Eck-Pseudodreieck. Die fett gedruckten Zustände sind bereits zulässig.

Der obige Beweis hat gezeigt, dass das Einfügen/Entfernen von Pseudodreiecken in logarithmischer Zeit geht. Bisher wurde noch nicht geklärt, wann Pseudodreiecke eingefügt und gelöscht werden müssen. Grundsätzlich kann nur ein Zertifikatfehler für eine Umstrukturierung verantwortlich sein. Gäbe es keine Zertifikatfehler, würde das heißen, dass sich an der Struktur nichts geändert hat. Zertifikate gibt es für Pseudodreiecke und Partitionsdreiecke. Ein Zertifikatfehler eines Partitionsdreiecks bedeutet schlicht, dass sich sein Vorzeichen bald ändert. Im Falle eines Pseudodreiecks gibt es zwei Arten von Zertifikaten, die Seitenzertifikate und die Eckzertifikate. Je nachdem, welche Art Ereignis vorliegt, muss genau überlegt werden, was getan werden muss damit am Ende eine gültige Struktur vorliegt. Es können wie gesagt Pseudodreiecke neu eingefügt und gelöscht werden, um die Struktur zu reparieren. Die Pfad-Invariante kann nach einem Ereignis verletzt sein, was bereits oben angesprochen wurde.

6.1 Partitionsdreiecke

Es gibt zwei Möglichkeiten, wenn ein Partitionsdreieck-Zertifikat fehlschlägt. Ein Partitionsdreieck hat an jeder seiner drei Kanten einen angeschlossenen Korridor, und an jeder seiner drei Eckpunkte ein Objekt. Bewegt sich nun ein Objekt anhand seines Flugplanes so, dass ein Partitionsdreieck das Vorzeichen wechseln würde, weil es in einen Korridor geschoben wird, so handelt es sich um ein Bewegungs-Ereignis. Der andere Fall ist jener, wenn zwei Partitionsdreiecke eine gemeinsame Kante teilen, gleichbedeutend damit dass der Korridor zwischen den beiden Dreiecken degeneriert ist. Das Pseudodreieck dringt in sein benachbartes Pseudodreieck ein, ein Tausch-Ereignis findet statt. O. B. d. A. sagen wir, dass ein Objekt am Punkt R in einen Korridor oder in ein Partitionsdreieck mit Endkante/Partitionsdreieck-Kante QP eindringt. R schneidet dann die Kante PQ , welche Objektpunkte von P und Q verbindet.

6.1.1 Bewegungs-Ereignis

Ist PQ eine Korridor-Endkante, handelt es sich um ein Bewegungs-Ereignis. Es muss ein neues Partitionsdreieck gefunden werden, das Alte ist in Begriff, sein Vorzeichen zu wechseln (siehe Abbildung 26). Der Eckpunkt R des alten Partitionsdreiecks kann beibehalten werden. Gesucht sind zwei neue. Das erste Pseudodreieck in einem Korridor kann entweder ein Eck-Pseudodreieck sein oder ein Objekt-Pseudodreieck.

Sei das erste Pseudodreieck o. B. d. A. ein P-Pseudodreieck. Es gibt drei Fälle, die unterschieden werden müssen (siehe Abbildung 27). Sie hängen davon ab, ob R den gegenüberliegenden Eckpunkt P_1 des ersten Pseudodreiecks sehen kann oder nicht. Kann er gesehen werden, so wird der dritte Eckpunkt des neuen Pseudodreiecks durch eine Tangente vom gegenüberliegenden Eckpunkt des Pseudodreiecks an Q bestimmt, was in $O(\log m)$ geht (Path Hull Data Structure).

Sieht R den Eckpunkt des Pseudodreiecks nicht, so muss bestimmt werden, welche Seitenkette das verursacht. Danach müssen zwei Tangenten bestimmt werden, um die beiden neuen Pseudodreieck-Eckpunkte zu finden. Auch dies geht in $O(\log m)$.

Sei nun o. B. d. A. das erste Pseudodreieck im Korridor ein P-Eck-Pseudodreieck. So kann Q in jedem Fall die komplette Seitenkette von P sehen, welche im Punkt P startet und in P_1 endet. Es muss nur der Punkt auf der Seitenkette von P nach P_1 gefunden werden, den R auch sehen kann (geht in $O(\log m)$). Das neue Partitionsdreieck ist durch Q , R und dem neuen Punkt auf der Seitenkette bestimmt (siehe Abbildung 25).

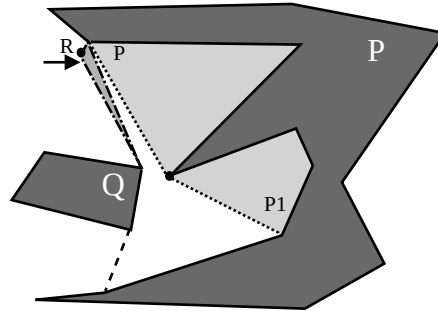


Abbildung 25: Q sieht die komplette Saiten-Kette von P .

Das neue Partitionsdreieck teilt das Objekt- oder Eck-Pseudodreieck in maximal vier neue Pseudodreiecke auf (inklusive des Partitionsdreiecks). Mindestens eines, aber maximal zwei Pseudodreiecke gehören in die Korridore RP und RQ (siehe Abbildung 27). Die Pfad-Invariante muss eventuell in diesen Korridoren wieder hergestellt werden. In dem Korridor, in dem

das neue Partitionsdreieck eingefügt wurde, kann die Pfad-Invariante nicht verletzt sein. Es werden keine neuen Pseudodreiecke in diesen Korridor eingefügt, die bestehenden Pseudodreiecke werden von Fall zu Fall verkleinert, ihren Typ ändert sie aber nicht.

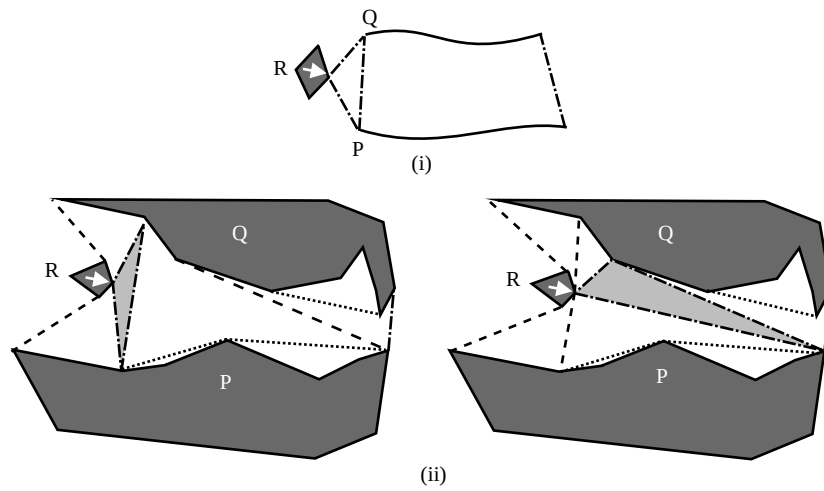


Abbildung 26: Bewegungs-Ereignis. (i) Schematisch, (ii) anhand eines Beispiels.

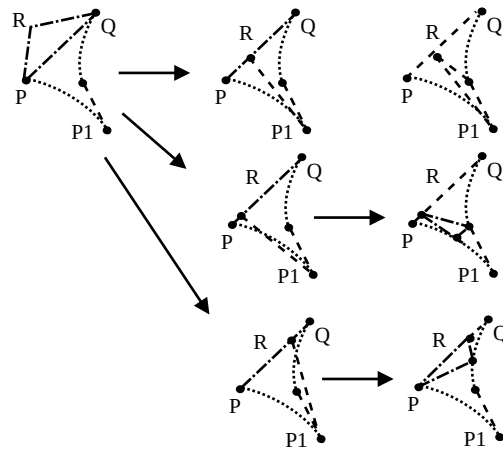


Abbildung 27: Die drei Fälle eines Bewegungsereignisses.

6.1.2 Tausch-Ereignis

Ist PQ eine Pseudodreieck-Kante, handelt es sich um ein Tausch-Ereignis. Die Diagonale zwischen den beiden Pseudodreiecken mit gemeinsamer Kante PQ wird einfach vertauscht und die Dreieckszertifikate werden aktualisiert (siehe Abbildung 28).

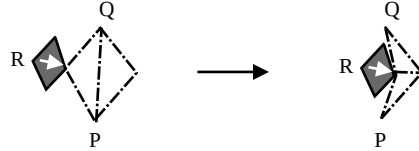


Abbildung 28: Tausch-Ereignis.

6.2 Pseudodreiecke

Wir wenden uns nun der Wartung von Pseudodreieck-Zertifikatfehlern zu. Es gibt zwei Arten von Ereignissen, welche durch unsere Definition von Pseudodreiecken gegeben ist. Oben haben wir ein zulässiges Pseudodreieck mit Hilfe von Winkeln definiert. Dementsprechend tritt ein Seiten-Zertifikatfehler ein, wenn ein Innenwinkel auf einer der Seitenketten < 180 Grad wird. Wird einer der drei Winkel an den Eckpunkten eines Pseudodreiecks ≤ 0 Grad, so liegt ein Eck-Zertifikatfehler vor.

6.2.1 Eck-Zertifikatfehler

Eck-Zertifikatfehler passieren, wenn sich zwei inzidente Kanten schneiden. Der Winkel zwischen ihnen ist dann nicht mehr > 0 Grad, was ja für Pseudodreiecke Voraussetzung ist. Im Folgendem sagen wir immer, dass eine kürzere Kante e mit einer längeren Kante f kollidiert. Sollten beide die gleiche Länge haben, so gibt es für die Art Kanten die überhaupt kollidieren können in jedem Fall eine Kollision. Diese ist zu berichten, was danach passiert ist vom spezifischen Einsatz-Szenario der KDS abhängig und wird hier nicht weiter betrachtet.

Saiten kollidieren nie mit Saiten (hier ist jede Art Saite gemeint, also auch eine Polygon-Grenzkante), da sie zum gleichen Objekt gehören. Unsere Objekte sind starr, es kann sich also nichts ändern. Wir können auch Brückenkollisionen (Brücken im allgemeinen, also auch Endkanten) untereinander ausschließen. Man kann sich klarmachen, dass eine Kollision zwischen Brücken nur eintreten kann, wenn eine der Brücken zur gleichen Zeit mit einer Saite kollidiert. Diese Art Ereignisse braucht also nicht extra betrachtet werden.

In einem Korridor können vier Arten von Kanten vorhanden sein: Polygon-Grenzkanten (degenerierte Saiten), Saiten, Brücken, Endkanten (degenerierte Brücken). Es gäbe also theoretisch 16 Kombinationsmöglichkeiten. Zur besseren Übersicht kürzen wir die vier Kanten mit den Zahlen von eins bis vier ab und klären für jeden möglichen Fall, ob er eintreten kann (siehe Tabelle).

Nr.	Art
1	Polygon-Grenzkante
2	Saite
3	Brücke
4	Endkante

- Grenz-Ereignis: Brücke e kollidiert mit Polygon-Grenzkante f . Weil die Brücke kürzer ist, muss der Endpunkt von e , welcher nicht mit f geteilt wird, die Kante f treffen. Es kommt zur Kollision.
- Saiten-Ereignis: Brücke e kollidiert mit ordentlicher Saite f .
- Brücken-Ereignis: Saite e kollidiert mit ordentlicher Brücke f .
- End-Ereignis: Saite e kollidiert mit Endkante f .

Die folgende Aufstellung gibt Aufschluss darüber, warum einige Kollisionskombinationen nicht eintreten können:

- 1-1 N/A: Saite - Saite (nicht möglich, da starre Objekte)
- 1-2 N/A: Saite - Saite (nicht möglich, da starre Objekte)
- 1-3 möglich: Brücken-Ereignis
- 1-4 möglich: End-Ereignis
- 2-1 N/A: Saite - Saite (nicht möglich, da starre Objekte)
- 2-2 N/A: Saite - Saite (nicht möglich, da starre Objekte)
- 2-3 möglich: Brücken-Ereignis
- 2-4 möglich: End-Ereignis
- 3-1 möglich: Grenz-Ereignis = Kollision
- 3-2 möglich: Saiten-Ereignis
- 3-3 Verweis: Brücke - Brücke -> Saiten-Ereignis
- 3-4 Verweis: Brücke - Brücke -> Saiten-Ereignis

- 4-1 möglich: Grenz-Ereignis -> Kollision
- 4-2 möglich: Saiten-Ereignis
- 4-3 Verweis: Brücke - Brücke -> Saiten-Ereignis
- 4-4 Verweis: Brücke - Brücke -> Saiten-Ereignis

Bei einem Grenz-Ereignis tritt in jedem Fall eine Kollision ein. Der Endpunkt der Brücke, welcher auch die Ecke eines Objekts ist, kollidiert mit der Grenzkannte eines Objektes. Weil die Brücke kürzer ist muss es eine Kollision geben, da am anderen Endpunkt der Brücke ein Polygon hängt. Bei den drei anderen Ereignissen welche eintreten können, muss etwas genauer hingesehen werden. Es gibt aber auf keinen Fall eine Kollision, wenn die Kanten unterschiedliche Länge haben. Betrachten wir die notwendigen Umstrukturierungsarbeiten des Saiten-Ereignisses zuerst.

Saiten-Ereignis - Brücke e kollidiert mit ordentlicher Saite f

Wenn eine (oder zwei) Brücken mit einer ordentlichen Saite kollidieren, wird diese zerstört. Ein Objekt dringt in eine Tasche ein (siehe Abbildung 29). Die alte Extrem-Saite wird durch ein oder zwei neue Extrem-Saiten ersetzt (die Kinder, der vorherigen Extrem-Saite). Hat die alte Extrem-Saite zwei Kinder, so existiert eine Tasche mehr als zuvor. Die Kinder einer Extrem-Saite lassen sich über den Saiten-Baum der Tasche finden. Sollte das Pseudodreieck T , für den Fall dass nur eine Brücke mit der Extrem-Saite kollidiert, ein Eck-Pseudodreieck sein, so wird es zu einem Objekt-Pseudodreieck. Das liegt daran, dass Brücke e verschwindet und die neu entstandene Brücke nicht mehr mit der Anderen auf einer Seitenkette liegt. In dem Fall muss die Pfad-Invariante wiederhergestellt werden.

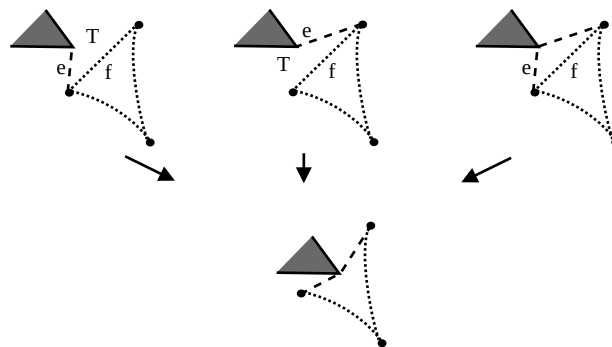


Abbildung 29: Saiten-Ereignis.

Brücken-Ereignis - Saite e kollidiert mit ordentlicher Brücke f

Kanten können nur kollidieren, wenn sie einen gemeinsamen Endpunkt teilen. O. B. d. A. sagen wir, dass die Kollision an einer Ecke q eines Objekts Q stattfindet, und die kollidierende Saite e mit Brücke f im Uhrzeigersinn von f aus um q liegt. Es gibt drei Unterfälle. Das Pseudodreieck T , welches sich gegen den Uhrzeigersinn von f befindet, ist (i) ein reines P-Pseudodreieck (die Seitenketten, welche die Brücken beinhalten, enthalten außer diesen sonst keine Segmente), (ii) ein unreines Pseudodreieck (enthält wenigstens eine Saite auf den konvexen Ketten der Brücken), oder (iii) ein reines oder unreines Q -Pseudodreieck oder Q -Eck-Pseudodreieck (siehe Abbildung 30).

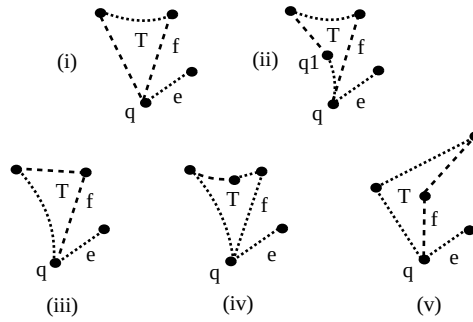


Abbildung 30: T ist ein (i) reines P-Pseudodreieck, (ii) unreines P-Pseudodreieck, (iii) reines Q -Pseudodreieck, (iv) unreines Q -Pseudodreieck oder (v) ein Q -Eck-Pseudodreieck.

T kann kein P -Eck-Pseudodreieck sein, da wir den Fall betrachten, bei dem die Kollision bei Q stattfindet. In einem P -Eck-Pseudodreieck würden die echten Ecken des Pseudodreiecks auf Punkte von P fallen (siehe Abbildung 31). Das gleiche gilt für das Pseudodreieck T' auf der rechten Seite.

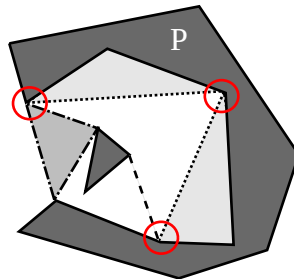


Abbildung 31: In einem P -Eck-Pseudodreieck sind die Ecken Punkte von P .

(i) - T ist ein reines P -Pseudodreieck:

Die Pfadinvariante lässt keine anderen Nachbardreiecke als ein Q -Pseudodreieck oder ein Q -Eck-Pseudodreieck zu. Andernfalls wäre die Pfad-Invariante nicht erfüllt, was nicht passieren kann, da sie nach jedem Umbau wiederhergestellt wird. Der Umbau in diesem Fall gestaltet sich wie folgt:

Nach der Kollision wird die Saite e ein Teil des Pseudodreiecks T , und die Brücke f startet von q_1 aus. Das geht in konstanter Zeit. Ist e die einzige Kante auf ihrer Seite des Pseudodreiecks T' , dann hört dieses auf zu existieren (es degeneriert quasi zu einem Teil der Brücke f , siehe Abbildung 32). Da T' ein Objekt-Pseudodreieck ist (hier ein Q -Pseudodreieck), ist die Pfad-Invariante trotz des Löschens erfüllt. Ist T' ein Q -Eck-Pseudodreieck, bleibt es auch eins. Die Seitenkette an Q wird nur um ein Segment kleiner.

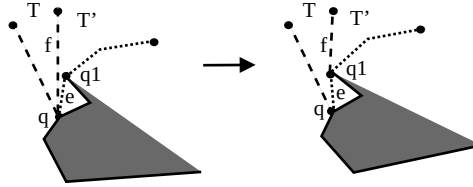


Abbildung 32: Brücken-Ereignis (i): Brücke f wird verkleinert und eine neue Saite kommt in die Seitenkette des Pseudodreiecks T .

(ii) - T ist ein unreines P -Pseudodreieck:

Die Kollision der Saite e verursacht eine Verkleinerung des Pfades, da sie in jedem Fall eine Tasche, mit der neuen Extrem-Saite q_2q_3 , vergrößert. Es hängt von dem Innenwinkel von q_2 und der Länge der Kante e ab, ob eine neues Pseudodreieck in den Korridor eingefügt werden muss. Bildet die Tangente von q_3 auf die konvexe Kette von q_1 bis q_2 selbst eine konvexe Kette mit der in q_2 startenden Brücke, so braucht kein Pseudodreieck eingefügt werden. Andernfalls muss ein Pseudodreieck, bestehend aus einer Saite von q_2 zu q_3 und aus Brücken von q_2 zum anderen Endpunkt von f und von q_3 zum anderen Endpunkt von f , eingefügt werden (siehe Abbildung 33). Obiges geht analog zu anderen Fällen in $O(\log m)$. Die Pfad-Invariante muss auf Korrektheit geprüft werden (wenn ein Pseudodreieck eingefügt wird).

(iii) - T ist ein Q -Pseudodreieck/ Q -Eck-Pseudodreieck:

T enthält eine konvexe Kette aus Saiten von Q . Die Kante e muss wie bei (ii) eingegliedert werden. Dies ist, wenn T ein Q -Eck-Pseudodreieck ist, ohne weitere Fallunterscheidungen möglich, da e kürzer als f ist wie vom

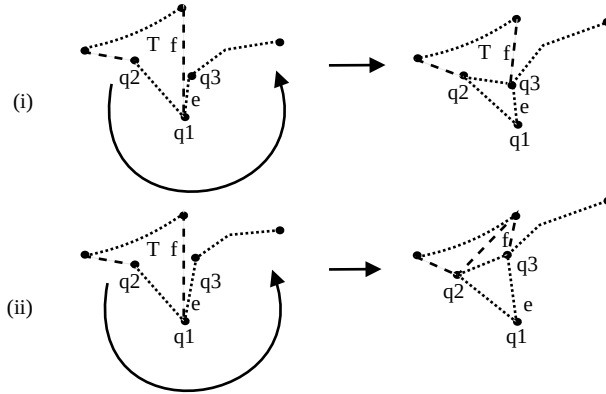


Abbildung 33: Brücken-Ereignis (ii): Dreht sich Q wie angedeutet, kann einer der beiden skizzierten Fälle eintreten. (i) Die Tangente von q_3 and q_2 bildet eine konvexe Seitenkette, (ii) es entsteht keine konvexe Seitenkette.

Eck-Pseudodreieck T lediglich ein Stück abgeschnitten, welches Teil einer Tasche wird. Es muss kein neues Pseudodreieck eingefügt werden.

Es gibt zwei Fälle, wenn T ein Q -Pseudodreieck ist. Die Fälle sind abhängig davon wie die Tangente von q_3 an die Kanten zwischen q_1 und q_2 aussieht. Liegt die Tangente im Innern des Pseudodreiecks, so wird sie Teil der Grenzkette (oder gar der einzige Teil der Grenzkette, was vom Winkel abhängt, siehe Abbildung 34). Die abgeschnittenen Q -Saiten werden Teil einer Tasche und müssen in den Saiten-Baum eingefügt werden.

Schneidet jedoch die Tangente die gegenüberliegende Seite des Pseudodreiecks, so muss ein neues Eck-Pseudodreieck kreiert werden. Dies stört nicht die Pfad-Invariante.

End-Ereignis - Saite e kollidiert mit Endkante f

Kanten e und f kollidieren an einem gemeinsamen Endpunkt q . Es handelt sich um eine Endkante eines Korridors, mit der e kollidiert. Die Saite e dringt also nicht in ein Pseudodreieck ein, sondern in ein Partitionsdreieck. Man kann den Eckpunkt q des Partitionsdreiecks von q auf q_1 verschieben. Rechts von f ändert sich nichts, außer dass sich eine Saite weniger im anliegenden Pseudodreieck T befindet. Das Partitionsdreieck wird kleiner und das Dreieck q_1pq wird in den adjazenten Korridor PQ verschoben, siehe Abbildung 35. Die Pfad-Invariante muss in dem Korridor PQ wiederhergestellt werden.

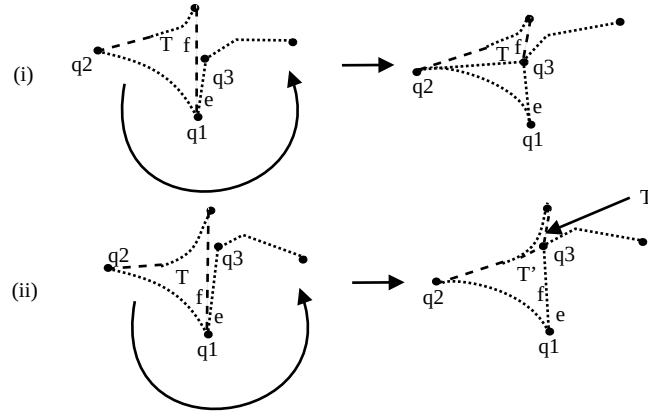


Abbildung 34: Brücken-Ereignis (iii): T ist ein Q -Pseudodreieck. Dreht sich Q wie angedeutet, so kann die Tangente von q_3 an die Seitenkette zwischen q_1 und q_2 entweder (ii) in T liegen, oder (ii) die andere Seitenkette schneiden.

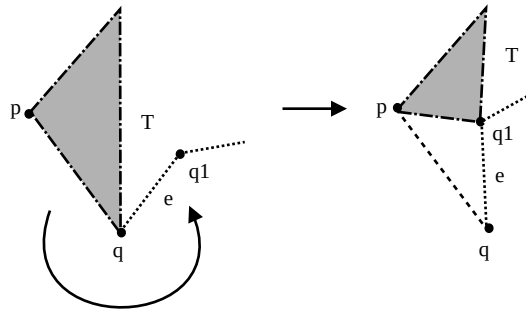


Abbildung 35: End-Ereignis: Das Partitionsdreieck wird verkleinert und ein neues Pseudodreieck wird eingefügt.

6.2.2 Seiten-Zertifikatfehler

Seitenzertifikate werden ungültig, wenn zwei adjazente Kanten einer Seitenkette eines Pseudodreiecks kollinear werden. Die folgende Aufstellung zeigt wieder, auf welche Ereignisse eingegangen werden muss; wieder können einige ausgeschlossen werden. Da dieses Mal nicht eine kürzere oder längere Kante beachtet werden muss, haben wir nur zehn Fälle; symmetrische Fälle brauchen nicht extra behandelt werden. Außerdem hilft wieder die Tatsache, dass sich Winkel zwischen Saiten (auch Polygon-Grenzkanten) nicht ändern, da wir starre Objekte vorausgesetzt haben:

Nr.	Art
1	Polygon-Grenzkante
2	Saite
3	Brücke
4	Endkante

- 1-1 N/A: Saite - Saite (nicht möglich, da starre Objekte)
- 1-2 = 2-1 N/A: Saite - Saite (nicht möglich, da starre Objekte)
- 1-3 = 3-1 möglich: Brücken-Ereignis
- 1-4 = 4-1 möglich: End-Ereignis
- 2-2 N/A: Saite - Saite (nicht möglich, da starre Objekte)
- 2-3 = 3-2 möglich: Brücken-Ereignis
- 2-4 = 4-2 möglich: End-Ereignis
- 3-3 Verweis: Brücke - Brücke -> Saiten-Ereignis
- 3-4 = 4-3 Verweis: Brücke - Brücke -> Saiten-Ereignis
- 4-4 Verweis: Brücke - Brücke -> Saiten-Ereignis

Saiten-Ereignis

Ein Seitenzertifikat zwischen Brücken kann nur fehlschlagen, wenn die Brücken Teil eines Eck-Pseudodreiecks sind. Handelt es sich um ein normales Objekt-Pseudodreieck und wären die Brücken adjazent, würde es sich um ein Eck-Zertifikat handeln.

Es muss eine neue Extrem-Saite e eingefügt werden, welche genau die beiden Punkte verbindet, welche die Brücken nicht gemeinsam haben. Das Eck-Pseudodreieck wird zu einem Pseudodreieck einer Tasche. Da die Brücken adjazent sind, befinden sich keine Saiten zwischen ihnen, weswegen ein neues Pseudodreieck T eingefügt werden kann. Die neue Extremsaite e wird Wurzel des Saitenbaumes für die Tasche und ersetzt die zwei alten Extremsaiten e_1 und e_2 (siehe Abbildung 36). Die Pfad-Invariante muss durch das Einfügen des Pseudodreiecks aktualisiert werden. Da ein Eck-Pseudodreieck gelöscht wurde und an der gleichen Stelle ein neues Objekt-Pseudodreieck eingefügt wurde, sind maximal fünf Objekt-Pseudodreiecke nebeneinander. Es wird also $O(\log m)$ (m ist wieder die Anzahl Punkte aller fünf Pseudodreiecke) Zeit benötigt, um die Umformungen der Pfadinvariante durchzuführen.

Brücken-Ereignis

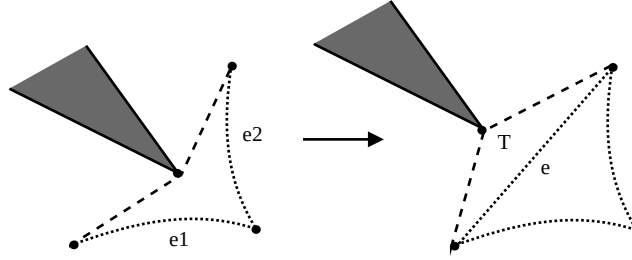


Abbildung 36: Saiten-Ereignis.

Seiten-Zertifikate zwischen zwei Kanten können nur fehlschlagen, wenn sie einen gemeinsamen Endpunkt auf der gleichen Seitenkette eines Pseudodreiecks haben. Daraus folgt, dass der gemeinsame Endpunkt einer ordentlichen Brücke f und einer Saite e nur an einem Punkt q , welcher keine Ecke ist, eines Objekt-Pseudodreiecks (es kann kein Eck-Pseudodreieck sein) kollinear zu den beiden benachbarten Punkten der Seitenkette werden kann. O. B. d. A. wird der Fall betrachtet, in dem q ein Punkt auf Q ist. Daraus folgt, dass das Pseudodreieck T , welches e und f enthält, nur ein P -Pseudodreieck oder ein P -Eck-Pseudodreieck sein kann. Jeder Endpunkt einer ordentlichen Brücke ist eine Ecke von mindestens einem Pseudodreieck. Weil q keine Ecke von T ist, muss es eine Ecke von T' sein (dem Nachbarn von T , von f aus gesehen). Aus diesem Grund ist es möglich, e nach T' zu verschieben, ohne dass ein Pseudodreieck seinen Typ ändert (siehe Abbildung 37). Die Pfad-Invariante muss nicht aktualisiert werden.

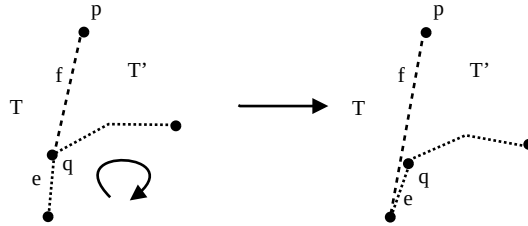


Abbildung 37: Brücken-Ereignis.

End-Ereignis

Eine Endkante gehört nur zu einem Pseudodreieck. Zweites adjazentes Nachbardreieck ist ein Partitionsdreieck. Es kann ein neues Objekt-Pseudodreieck eingefügt werden (siehe Abbildung 38). Die Pfad-Invariante kann verletzt sein.

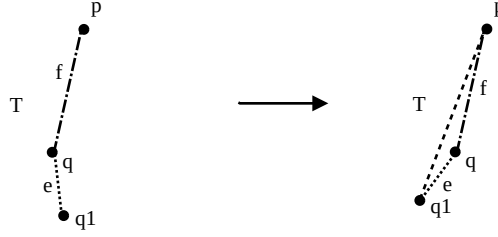


Abbildung 38: End-Ereignis.

7 Eigenschaften der KDS

Der Aufbau der Datenstruktur und ihre Wartung wurde oben detailliert beschrieben. Kommen wir nun zu der Analyse der vier Grundeigenschaften einer KDS.

7.1 Kompaktheit

Die Größe einer KDS ist die maximale Anzahl von Zertifikaten, welche sich jemals gemeinsam in der Ereignisschlange befinden. Es gibt $\Theta(k)$ Partitionsdreiecke, deren Zertifikate zu jeder Zeit in der Ereignisschlange sind. Jedes Polygon P hat $\Theta(\kappa_P)$ Pseudodreieck-Zertifikate in den angrenzenden Korridoren. κ_P ist der minimale Link-Zyklus um das Polygon. Die Pseudodreieck-Zertifikate werden durch alle minimalen Link-Zyklen $\Theta(\Sigma_P \kappa_P)$ dominiert. Es ist noch erwähnenswert, dass sich in einer Szene, in der die konvexen Hüllen der Polygone paarweise disjunkt sind, $\Theta(k)$ Zertifikate gleichzeitig aktiv sind. Der Worst Case mit $\Theta(N)$ tritt ein wenn die Polygone stark verflochten sind, da es dann $\Theta(N)$ Eck-Pseudodreiecke gibt.

7.2 Lokalität

Jedes Polygon ist von Pfaden, welche durch Partitionsdreiecke verbunden werden, umhüllt. Die Anzahl der Zertifikate eines Polygons P lässt sich somit beschränken durch $O(k + \kappa_P)$. Im Worst Case kann κ_P $O(N)$ sein.

7.3 Ansprechverhalten

Wir haben zwei Zertifikat-Arten identifiziert: Dreieck-Zertifikate (für Pseudodreiecke) und Korridor-Zertifikate (bestehend aus Seiten- und Eck-Zertifikaten). Beide Arten können in $O(\log m)$ (m ist wieder die Anzahl der Segmente der involvierten Pseudodreiecke ist, maximal fünf) aktualisiert werden, wie oben mehrfach erwähnt. Die Aktualisierung beinhaltet das Löschen und

Einfügen von konstant vielen Kanten und den zugehörigen Eck- und Seiten-Zertifikaten. Jedes Zertifikat, das ein korrespondierendes Objekt referenziert, muss in der Ereignisschlange neu vorgesehen werden. Dies benötigt logarithmische Zeit in der Anzahl der Objekte in der Ereignisschlange.

7.4 Effizienz

Bereits bei der Einführung der KDS wurde erwähnt, dass Kollisionserkennung eine Ausnahme ist, was die typische Effizienz-Analyse einer KDS angeht. In der Regel gibt es interne und externe Ereignisse. Externe Ereignisse sind Ereignisse, die einen kombinatorischen Wechsel in der Konfigurationsfunktion zur Folge haben. Die Annahme, dass wir eine binäre Konfigurationsfunktion mit Ergebnissen True, für keine Kollision, und False, für Kollision, haben, hat zur Folge, dass es in unseren Fall keine externen Ereignisse gibt. Anders gesagt, es gibt im Worst Case genau ein externes Ereignis. Die Effizienz für KDS ist aber definiert durch das Verhältnis von internen zu externen Ereignissen. Gut ist, wenn es wenig interne Ereignisse gibt. Die intuitive Konfigurationsfunktion ist also in Hinblick auf die Effizienz unserer KDS nicht brauchbar.

Wir können allerdings externe Ereignisse auch als Änderungen der Segmente des minimalen Link-Separators ansehen. Somit wären externe Ereignisse dafür verantwortlich, wenn sich die räumliche Relation zwischen Objekten ändert. Leider gibt es keine Verbindung zwischen der Komplexität des minimalen Link-Separators und der Anzahl der abgearbeiteten Ereignisse. Folgende einfache obere Schranke wird von den Autoren angegeben:

Theorem 12 *Wenn sich k einfache Polygone mit insgesamt N Eckpunkten entlang einer algebraischen Trajektorie vom Grad d fortbewegen, so ist die Anzahl der von der KDS abgearbeiteten Ereignisse $O(dN^3)$.*

Beweis. Es genügt zu beobachten, dass Ereignisse generell eintreten, also Zertifikate auslaufen, wenn drei Punkte kollinear werden. $\square$

Literatur

- [1] J. Basch, L. Guibas, and J. Hersberger. Data structures for mobile data. In *Proc. 8th ACM-SIAM Sympos.*, Discrete Algorithms, pages 747–756, 1997.
- [2] J. Basch, L. Guibas, C. Silverstein, and L. Zhang. A practical evaluation of kinetic data structures. In *Proc. 13th ACM Sympos.*, Comp. Geom., pages 388–390, 1997.
- [3] D. Kirkpatrick, J. Snoeyink, and B. Speckmann. Kinetic collision detection for simple polygons. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, 12:3–27, 2002.