

RHEINISCHE FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT BONN
INSTITUT FÜR INFORMATIK I



Jochen Welle

**Platzsparende
Einbettung von
Binärbäumen**

27. März 2007

Seminararbeit im SoSe 2007

Zusammenfassung

Diese Arbeit stellt vor, wie sich Binärbäume mit geradlinigen Kanten und auf einem Gitter liegenden Knoten, planar in der Ebene darstellen lassen. Dabei wird gezeigt, dass eine Einbettung eines n -Knoten Baumes in einem Rechteck mit linearer Fläche bei (fast) beliebigem Seitenverhältnis möglich ist und die Konstruktion einer solchen Einbettung in $O(n \log(n))$ Zeit erreicht wird.

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Einführung | 2 |
| 2 | Vorbereitungen | 2 |
| 3 | Der Algorithmus | 5 |
| 3.1 | Zerteilen | 5 |
| 3.2 | Seitenverhältnis zuweisen | 10 |
| 3.3 | Partielle Bäume zeichnen | 10 |
| 3.4 | Zusammensetzen | 11 |
| 3.5 | Analyse des Algorithmus <i>ZeichneBaum</i> | 15 |
| 4 | Schlussbemerkung | 21 |

1 Einführung

Bäume finden vielerorts Verwendung in der Informatik und auch in vielen anderen Gebieten. Häufig ist eine graphische Darstellung von Bäumen gewünscht, dabei gibt es verschiedene Varianten, von denen ein paar nun kurz vorgestellt werden.

Definition 1 Eine *Einbettung* Γ eines Baumes T ordnet jedem Knoten von T injektiv einen Punkt in der Ebene und jeder Kante (u, v) von T eine einfache Jordan-Kurve mit Endpunkten u und v zu.

Eine Einbettung Γ heißt:

- *geradlinig*, wenn jede Kante als ein Liniensegment gezeichnet wird.
- *planar*, wenn sich die Kanten nicht überschneiden.
- *Gitter-Einbettung*, wenn jeder Knoten auf Integer-Koordinaten liegt.

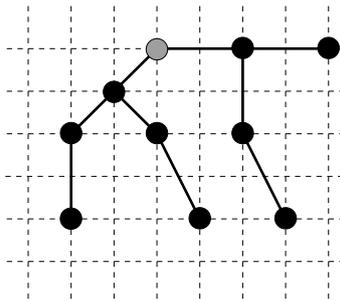


Abbildung 1: geradlinige, planare Gitter-Einbettung eines Binärbaumes

Im Folgenden wird der Einbettungs-Algorithmus aus [1] vorgestellt. Dort wird gezeigt, dass eine Einbettung eines n -Knoten Baumes in der Ebene gradlinig und planar, mit geringem Platzverbrauch (innerhalb eines Rechteckes mit $O(n)$ Fläche) und in $O(n \log n)$ Laufzeit möglich ist. Dabei kann das Seitenverhältnis A des Rechteckes aus dem Intervall $[n^{-\epsilon}, n^\epsilon]$, bei gegebener Konstante $\epsilon \in (0, 1)$, frei gewählt werden. Der Flächenverbrauch ist optimal, da jede Gitter-Einbettung eines n -Knoten Binärbaumes $\Omega(n)$ Fläche benötigt.

2 Vorbereitungen

Dazu zunächst ein paar Vorbereitungen. Die Fläche und das Seitenverhältnis von Γ definieren wir über das einschließende Rechteck $R(\Gamma)$.

Definition 2 Ein achsenparalleles Rechteck R ist das *einschließende Rechteck* einer Einbettung Γ , $R(\Gamma)$, falls R das kleinste Rechteck ist, dass die gesamte Zeichnung überdeckt.

- Das *Seitenverhältnis* A von R ist der Quotient aus seiner Breite und Höhe.
- Mit *Breite*, *Höhe*, *Fläche* und *Seitenverhältnis* von Γ meinen wir Breite, Höhe, Fläche und Seitenverhältnis des einschließenden Rechteckes.
- Γ hat ein *gutes* Seitenverhältnis A , wenn $A \in [n^{-\epsilon}, n^\epsilon]$ mit $0 < \epsilon < 1$.
- Desweiteren meinen wir mit dem *unteren* bzw. *oberen*, *linken* und *rechten* Rand von Γ den entsprechenden Rand des einschließenden Rechtecks $R(\Gamma)$.
- Genauso bezeichnet die *obere linke* (*obere rechte*, *untere linke* und *untere rechte*) Ecke von Γ die *obere linke* (*obere rechte*, *untere linke* und *untere rechte*) Ecke von $R(\Gamma)$.

Wir definieren zwei Operationen auf einer Einbettung Γ .

Definition 3 Sei Γ eine Einbettung von T und v ein Knoten von T und $\Gamma(v)$ habe die Koordinaten (i, j) . Die Abbildung der Wurzel o von T habe die Koordinaten $(0, 0)$.

- Die *Rotations-Operation* rotiert Γ gegen den Uhrzeigersinn um einen Winkel δ um $(0, 0)$. Danach befindet sich v auf den Koordinaten $(i \cos \delta - j \sin \delta, i \sin \delta + j \cos \delta)$. Insbesondere hat $\Gamma(v)$ die Koordinaten $(-j, i)$ falls $\delta = 90^\circ$.
- Die *Spiegelungs-Operation* spiegelt Γ horizontal an der x-Achse oder vertikal an der y-Achse. Eine horizontale Spiegelung bringt $\Gamma(v)$ auf die Koordinaten $(i, -j)$, eine vertikale Spiegelung auf $(-i, j)$.

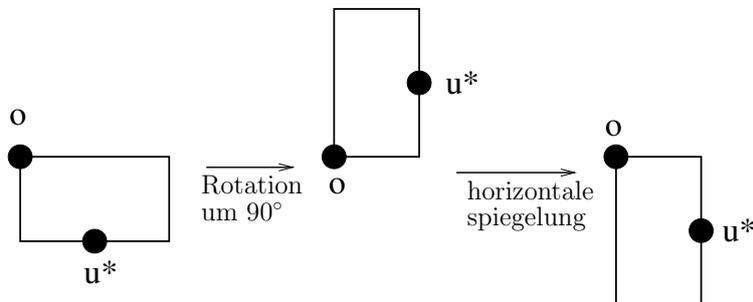


Abbildung 2: Rotation um 90° gefolgt von horizontaler Spiegelung.

Wir betrachten eine Einbettung Γ . Eine Rotation um 90° gefolgt von einer Spiegelung an der x-Achse läßt die linke-obere Ecke von Γ unverändert (bleibt linke-obere Ecke) und Punkte die sich auf dem unteren Rand befanden, sind nun am rechten Rand (siehe Abbildung 2). Dies werden wir später beim Zusammensetzen von Einbettungen benutzen.

Wir nehmen an, dass die Ebene von einem unendlichen ganzzahligen Gitter überdeckt ist. Eine *Zeile/Spalte* ist eine Linie parallel zur x/y-Achse, die durch Gitter-Punkte verläuft.

Es gibt verschiedenste Arten von Bäumen wir beschränken uns hier auf binäre Wurzel-Bäume. Ein *partieller* Baum von T ist ein zusammenhängender Teilgraph von T . Als *Teilbaum* von T mit Wurzelknoten v bezeichnen wir den Baum $T(v)$, der v und alle Nachfahren von v umfaßt.

Ein Baum T ist ein *geordneter* Baum, wenn die Kindknoten jedes Knoten eine links-rechts Ordnung haben. Ist T ein geordneter Baum, dann bezeichnet der *linkeste Pfad* p den maximalen Pfad, ausgehend von der Wurzel, aus den linken Kindern. Der *linkeste* Knoten von T ist der letzte Knoten von p .

Zwei Knoten von T sind *Geschwister*, wenn sie den selben Vaterknoten haben. Sei v ein Knoten eines geordneten Baumes. Mit $s(v)$, $p(v)$, $l(v)$ und $r(v)$ werden der Geschwister-, Vater-, linker Kind- und rechter Kind-Knoten von v bezeichnet.

Wir benutzen später sogenannte *Verbindungsknoten*, um die Einbettungen zweier Bäume zu verbinden, so dass die Einbettung eines größeren Baumes entsteht, der beide Bäume enthält. Der *Verbindungsknoten* hat höchstens einen Kindknoten und wir mit u^* bezeichnet.

Definition 4 Sei T ein Baum mit Verbindungsknoten u^* und sei o die Wurzel von T . Eine planare, geradlinige Gitter-Einbettung Γ von T ist eine *zulässige* Einbettung, wenn sie die folgenden drei Eigenschaften erfüllt:

Eigenschaft 1: Die Wurzel o wird in die linke-obere Ecke von Γ abgebildet.

Eigenschaft 2: Falls $u^* \neq o$, dann ist u^* auf dem unteren Rand von Γ platziert. Außerdem läßt sich u^* in seiner Spalte um eine beliebige Distanz abwärts bewegen, ohne das sich Kanten in Γ kreuzen.

Eigenschaft 3: Falls $u^* = o$, dann liegt kein anderer Knoten von T in der Zeile oder Spalte von o und keine Kante kreuzt die Zeile oder Spalte von o . Außerdem läßt sich u^* , also o , um eine beliebige Distanz nach oben verschieben, ohne das sich Kanten in Γ kreuzen.

Das folgende Theorem aus [2] werden wir benutzen.

Theorem 5 (Separator Theorem [2]) *Jeder Binärbaum T mit n Knoten, wobei $n \geq 2$, enthält eine Kante e , die Separator-Kante, so dass gilt:*

entfernt man e aus T , wird T in zwei nichtleere Bäume mit n_1 und n_2 Knoten geteilt, für die gilt: $\exists x, \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} : n_1 = xn \wedge n_2 = (1-x)n$. Die Kante e kann in $O(n)$ Zeit gefunden werden.

3 Der Algorithmus

Sei T ein Binärbaum mit n Knoten, Verbindungsknoten u^* und Wurzel o . Sei eine Konstante ϵ , mit $0 < \epsilon < 1$, gegeben und sei A eine Zahl, mit $n^{-\epsilon} \leq A \leq n^\epsilon$. A ist das gewünschte Seitenverhältnis.

Der Algorithmus *ZeichneBaum* nimmt T , A und ϵ als Eingabe und erzeugt in einem Divide & Conquer Verfahren eine zulässige Einbettung Γ . Dabei werden die folgenden Schritte durchgeführt:

- *Zerteilen*: T wird durch Entfernen von maximal 2 Knoten in höchstens 5 partielle Bäume geteilt. Jeder partielle Baum hat dabei höchstens $2/3 \cdot n$ Knoten.
- *Seitenverhältnis zuweisen*: Jedem partiellen Baum T_k wird ein gewünschtes Seitenverhältnis A_k zugewiesen.
- *Partielle Bäume zeichnen*: Erstelle rekursiv eine zulässige Einbettung Γ_k mit Seitenverhältnis A_k jedes partiellen Baumes T_k .
- *Zusammensetzen*: Setze die Γ_k , durch Hinzufügen der beim Zerteilen entfernten Knoten und Kanten, zu einer zulässigen Einbettung Γ von T zusammen.

Es kann sein, dass Γ nicht exakt das Seitenverhältnis A hat, aber wir werden zeigen, dass die Einbettung in ein Rechteck mit Seitenverhältnis A und $O(n)$ Fläche passt.

Ein Beispiel für die Ausgabe des Algorithmus ist in Abbildung 3 zu sehen.

Kommen wir nun im Detail zu den einzelnen Schritten des Algorithmus.

3.1 Zerteilen

Zunächst ordnen wir die Kindknoten eines jeden Knotens, so dass u^* zum linken Knoten von T wird. Wir starten bei der Wurzel und bestimmen, ob sich u^* im linken oder rechten Teilbaum befindet. Ist u^* im rechten Teilbaum vertauschen wir die Kindknoten des Wurzelknotens, dann fahren wir mit dem linken Kindknoten genauso fort bis wir u^* erreichen. u^* hat maximal einen Kindknoten, dieser wird als rechtes Kind platziert. Dann benutzen wir Theorem 5 um eine Separator-Kante (u, v) zu finden, wobei u der Vaterknoten von v ist. Jetzt ergeben sich zwei Fälle:

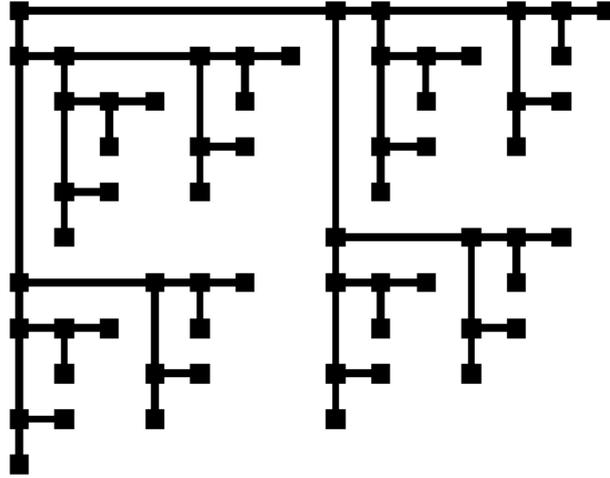
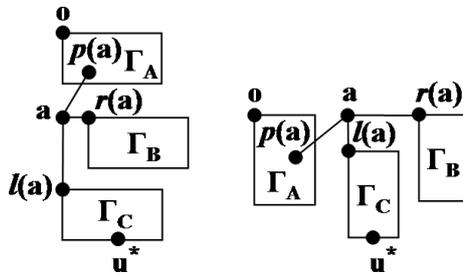
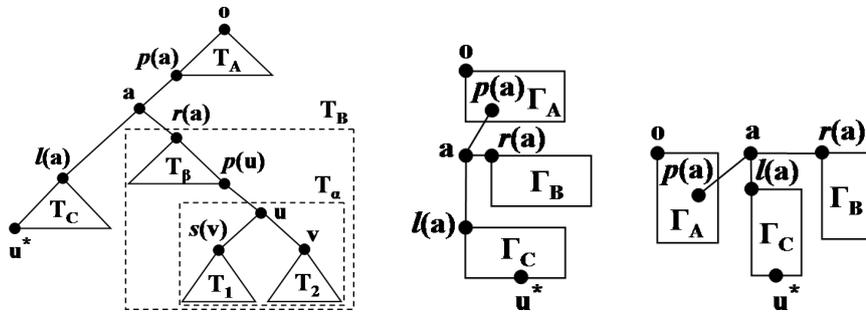


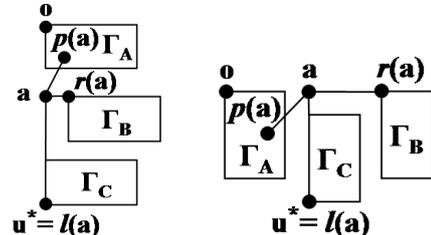
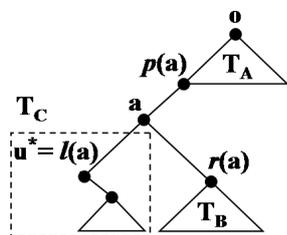
Abbildung 3: Einbettung eines Binärbaums mit 63 Knoten, mit $A = 1$ und $\epsilon = 0.5$

- *Fall 1:* Die Separator-Kante (u, v) ist nicht Teil des linken Pfades von T . Sei a der letzte gemeinsame Knoten von $o \rightsquigarrow v$ und dem linken Pfad von T . Wir definieren nun die partiellen Bäume $T_A, T_B, T_C, T_\alpha, T_\beta, T_1$ und T_2 :
 - Wenn $o \neq a$, dann ist T_A der maximale partielle Baum mit Wurzel o , der $p(a)$ enthält, aber nicht a . Wenn $o = a$, dann $T_A = \emptyset$.
 - T_B ist der Teilbaum mit Wurzel $r(a)$.
 - Wenn $u^* \neq a$, dann ist T_C der Teilbaum mit Wurzel $l(a)$, sonst, also $u^* = a$, $T_C = \emptyset$.
 - Wenn $s(v)$ existiert, dann ist T_1 der Teilbaum mit Wurzel $s(v)$, sonst ist $T_1 = \emptyset$.
 - T_2 ist der Teilbaum mit Wurzel v .
 - Wenn $u \neq a$, dann ist T_α der Teilbaum mit Wurzel u , sonst ist $T_\alpha = T_2$. Es gilt $T_\alpha \subseteq T_B$.
 - Wenn $u \neq a$ und $u \neq r(a)$, dann ist T_β der maximale partielle Baum mit Wurzel $r(a)$, der $p(u)$ enthält, aber nicht u . Wenn $u = a$ oder $u = r(a)$, dann $T_\beta = \emptyset$. T_β gehört zu T_B .

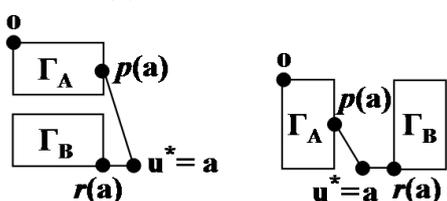
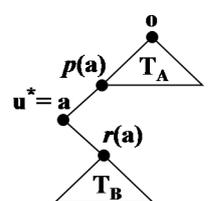
Es gibt nun 16 Unterfälle, je nachdem ob $T_A = \emptyset$ oder nicht, $T_C = \emptyset$ oder nicht, $u^* = l(a)$ oder nicht und $o = p(a)$ oder nicht. T_2 hat nach Theorem 5 mindestens $n/3$ Knoten und ist somit nie leer und damit ist auch $T_B \neq \emptyset$. Von diesen 16 Unterfällen fassen wir nun noch einige zusammen, so dass wir die sieben Unterfälle in Abbildung 4 erhalten.



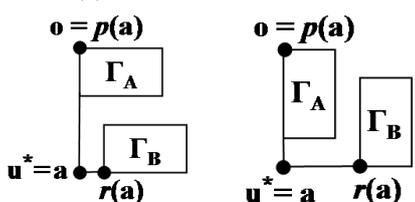
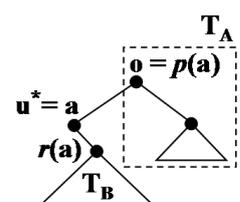
(a)



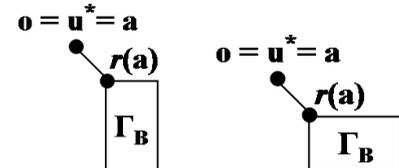
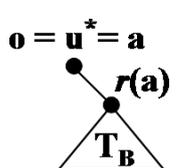
(b)



(c)



(d)



(e)

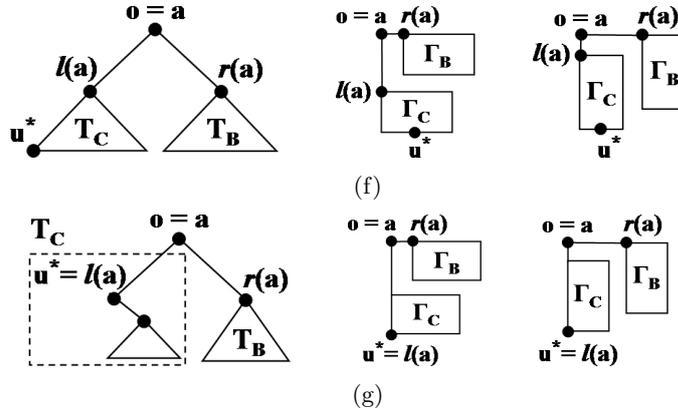


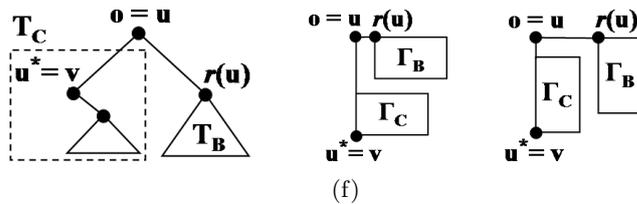
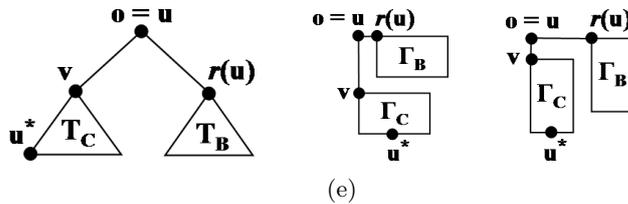
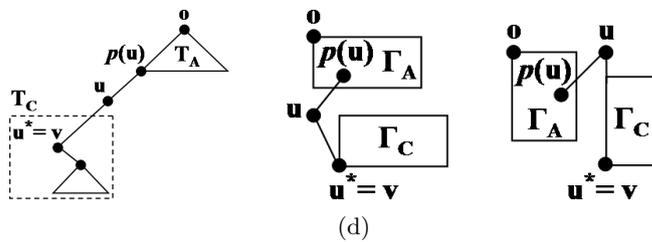
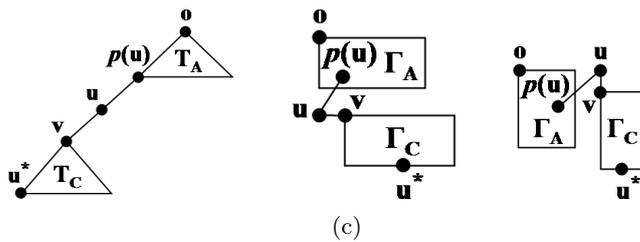
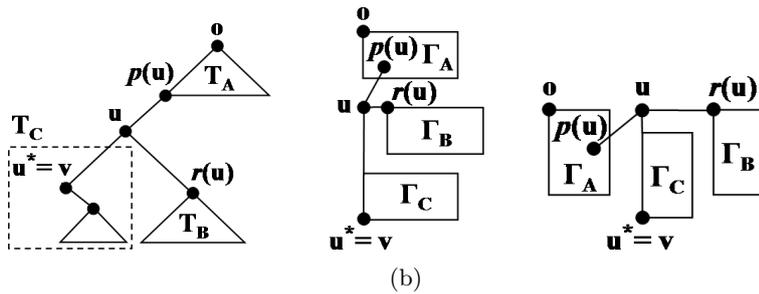
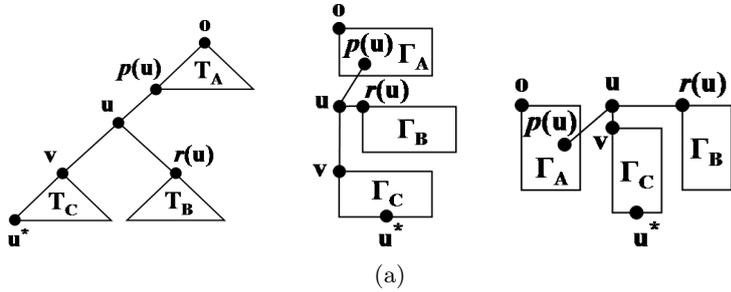
Abbildung 4: Sieben Unterfälle von Fall 1. Das erste Bild ist jeweils die schematische Darstellung von T , das Zweite zeigt die Einbettung für $A < 1$ und das Dritte für $A \geq 1$.

In jedem Fall entfernen wir die Knoten a und u und deren angrenzende Kanten und teilen so T in höchstens 5 Bäume auf, T_A , T_C , T_β , T_1 und T_2 . Dabei weisen wir T_A den Knoten $p(a)$ als Verbindungsknoten zu, T_C bekommt u^* , T_β bekommt $p(u)$ und T_1 und T_2 bekommen jeweils einen beliebigen Blatt-Knoten als Verbindungsknoten.

- *Fall 2:* Die Separator-Kante (u, v) ist im linken Pfad von T . Wir definieren die partiellen Bäume T_A , T_B , T_C :
 - Wenn $o \neq u$, dann ist T_A der maximale partielle Baum mit Wurzel o , der $p(u)$ enthält, aber nicht u , sonst ist $T_A = \emptyset$.
 - Wenn $r(u)$ existiert, dann ist T_B der Teilbaum mit Wurzel $r(u)$, sonst $T_B = \emptyset$.
 - T_C ist der Teilbaum mit Wurzel v .

Abhängig davon ob $T_A = \emptyset$ oder nicht, $T_B = \emptyset$ oder nicht und $v = u^*$ oder nicht, erhalten wir acht Unterfälle. T_C hat nach Theorem 5 mindestens $n/3$ Knoten. Die Unterfälle sind in Abbildung 5 dargestellt.

Wir entfernen jeweils den Knoten u und die angrenzenden Kanten um T in höchstens drei partielle Bäume, T_A , T_B , T_C , aufzuteilen. Der Verbindungsknoten von T_A wird $p(u)$. Der Verbindungsknoten von T_C wird u^* . T_B weisen wir einen beliebigen Blatt-Knoten als Verbindungsknoten zu.



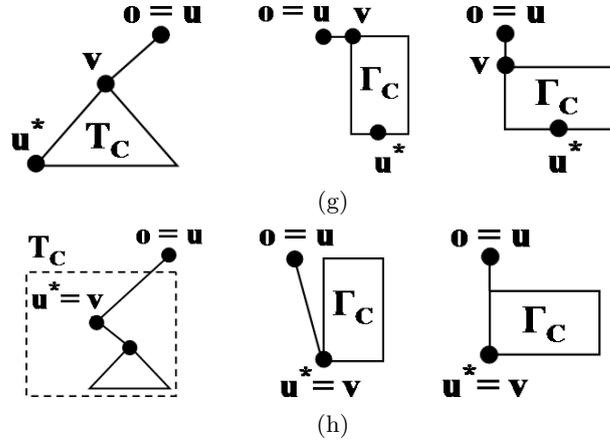


Abbildung 5: Die acht Unterfälle von Fall 2. Das erste Bild ist jeweils die schematische Darstellung von T , das Zweite zeigt die Einbettung für $A < 1$ und das Dritte für $A \geq 1$.

3.2 Seitenverhältnis zuweisen

Sei T_k einer der oben definierten partiellen Bäume von T , wobei T_B und T_α aus Fall 1 ausgenommen sind, da diese aus anderen partiellen Bäumen bestehen. Sei n_k die Anzahl der Knoten von T_k

Definition 6 T_k ist ein *großer* partieller Baum von T , wenn:

- $A \geq 1$ und $n_k \geq (n/A)^{1/(1+\epsilon)}$, oder
- $A < 1$ und $n_k \geq (nA)^{1/(1+\epsilon)}$,

ansonsten ist T_k ein *kleiner* partieller Baum.

Sei $x_k = n_k/n$. Wir weisen jedem nicht leeren Baum T_k ein gewünschtes Seitenverhältnis A_k zu:

- $A \geq 1$: Wenn T_k ein großer partieller Baum ist, dann $A_k = x_k A$, ansonsten $A_k = n_k^{-\epsilon}$.
- $A < 1$: Wenn T_k ein großer partieller Baum ist, dann $A_k = x_k/A$, ansonsten $A_k = n_k^\epsilon$.

3.3 Partielle Bäume zeichnen

Zunächst ändern wir in manchen Fällen die Seitenverhältnisse A_A und A_β und zwar:

- In Fall 1(c) ändern wir A_A zu $1/A_A$ und falls $A \geq 1$ wird auch noch A_β zu $1/A_\beta$ geändert.

- In den Fällen 1(a) und 1(b), falls $A \geq 1$ werden A_A und A_β zu $1/A_A$ und $1/A_\beta$ geändert.
- In den Fällen 1(d), 1(e), 1(f) und 1(g), falls $A \geq 1$ wird A_β zu $1/A_\beta$ geändert.
- In den Fällen 2(a), 2(b), 2(c) und 2(d), falls $A \geq 1$ wird A_A zu $1/A_A$ geändert.

Die Änderungen sind nötig um Rotationen in den entsprechenden Fällen auszugleichen, die beim Zusammensetzen der Einbettungen durchgeführt werden.

Nun werden rekursiv alle nicht leeren T_k mit gewünschten Seitenverhältnissen A_k gezeichnet. Die Rekursion bricht ab, wenn T_k nur noch einen Knoten enthält, dann besteht die Einbettung von T_k einfach aus diesem einen Knoten.

3.4 Zusammensetzen

Nun werden die, im vorherigen Schritt erstellten, Einbettungen der partiellen Bäume Γ_k zu einer zulässigen Einbettung Γ von T zusammengesetzt.

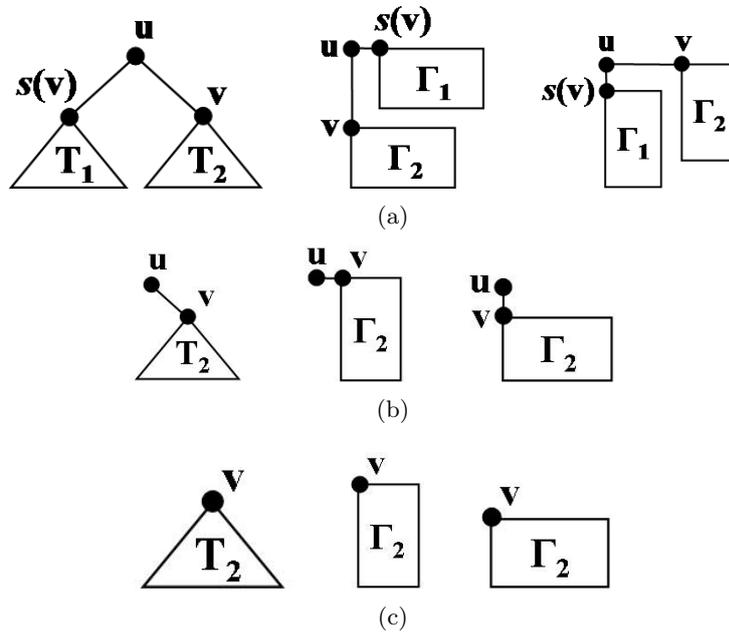


Abbildung 6: Einbettung von T_α .

Im Fall 1 konstruieren wir zunächst eine Einbettung Γ_α von T_α aus Γ_1 und Γ_2 (siehe Abbildung 6).

- Wenn $u \neq a$ und $T_1 \neq \emptyset$ (siehe Abbildung 6(a)) dann:
 - $A < 1$: Γ_1 wird über Γ_2 platziert, so dass der linke Rand von Γ_1 eine Einheit rechts des linken Randes von Γ_2 liegt. u wird in der selben Spalte wie v und in der selben Zeile wie $s(v)$ platziert.
 - $A \geq 1$: Γ_1 wird eine Einheit links von Γ_2 platziert, so dass der obere Rand von Γ_1 eine Einheit unter dem oberen Rand von Γ_2 liegt. u wird in der selben Spalte wie $s(v)$ und in der selben Zeile wie v platziert.

Die Kanten $(u, s(v))$ und (u, v) werden eingezeichnet.

- Wenn $u \neq a$ und $T_1 = \emptyset$ (siehe Abbildung 6(b)) dann:
 - $A < 1$: u wird eine Einheit links von Γ_2 in der selben Zeile wie v platziert.
 - $A \geq 1$: u wird eine Einheit über Γ_2 in der selben Spalte wie v platziert.

Die Kante (u, v) wird eingezeichnet.

- Wenn $u = a$, dann ist $\Gamma_\alpha = \Gamma_2$ (siehe Abbildung 6(c)).

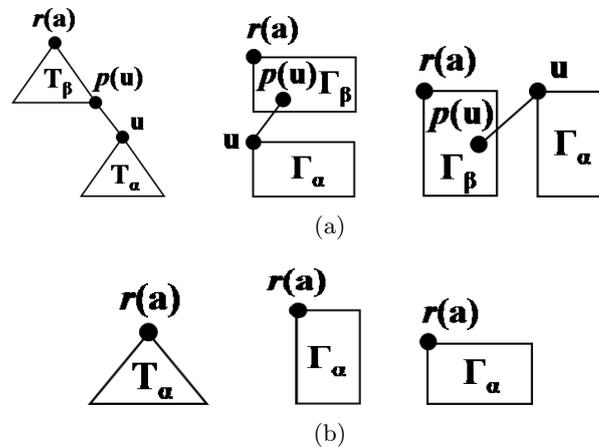


Abbildung 7: Einbettung von T_B .

Jetzt konstruieren wir eine Einbettung Γ_B von T_B aus Γ_α und Γ_β (siehe Abbildung 7):

- Wenn $T_\beta \neq \emptyset$ (siehe Abbildung 7(a)) dann:
 - $A < 1$: Wir platzieren Γ_β eine Einheit über Γ_α , so dass sie linksbündig ausgerichtet sind.

- $A \geq 1$: Die Einbettung Γ_β wird um 90° rotiert und dann horizontal gespiegelt, dann wird Γ_β eine Einheit links von Γ_α platziert, so dass die oberen Ränder in der selben Zeile sind.

Zeichne die Kante $(p(u), u)$

- Wenn $T_\beta = \emptyset$, dann ist $\Gamma_B = \Gamma_\alpha$ (siehe Abbildung 7(b)).

Nun wird Γ aus Γ_A , Γ_B und Γ_C konstruiert (siehe Abbildung 4):

- Im Unterfall (a) konstruieren wir Γ wie folgt (siehe Abbildung 4(a)):
 - $A < 1$: Wir platzieren Γ_A , Γ_B und Γ_C übereinander mit einer Einheit Abstand und richten Γ_A und Γ_C linksbündig aneinander aus und eine Einheit links von Γ_B . Nun wird a in die selbe Spalte wie o und $l(a)$ und in die selbe Zeile wie $r(a)$ gesetzt.
 - $A \geq 1$: Zunächst rotieren wir Γ_A um 90° und spiegeln dann horizontal. Dann platzieren wir Γ_A , Γ_C und Γ_B von links nach rechts nebeneinander mit einer Einheit Abstand und richten Γ_A und Γ_B oben bündig aneinander aus und eine Einheit höher als Γ_C . Nun bewegen wir Γ_C nach unten bis u^* der unterste Knoten von Γ ist. a wird in der selben Spalte wie $l(a)$ und in der selben Zeile wie o und $r(a)$ platziert.

Zuletzt zeichnen wir die Kanten $(p(a), a)$, $(a, r(a))$ und $(a, l(a))$.

- Im Unterfall (b) gehen wir ähnlich wie in (a) vor, aber zusätzlich wird noch Γ_C horizontal gespiegelt (siehe Abbildung 4(b))
- Im Unterfall (c) gehen wir vor wie in Abbildung 4(c) zu sehen (beachte $u^* = a$):
 - $A < 1$: Zunächst wird Γ_B horizontal und dann vertikal gespiegelt. Dann rotieren wir Γ_A um 90° und spiegeln es horizontal. Als nächstes platzieren wir Γ_A über Γ_B , so dass sie linksbündig aneinander ausgerichtet sind. Der Knoten $p(a)$ wird nach rechts bewegt, bis er der rechteste Knoten oder bündig mit dem rechten Rand von Γ_B ist. Nun platzieren wir a in der selben Zeile wie $r(a)$ und eine Einheit rechts von $p(a)$.
 - $A \geq 1$: Γ_A wird um 90° rotiert und horizontal gespiegelt. Γ_B wird horizontal gespiegelt. Dann werden Γ_A , a und Γ_B nebeneinander von links nach rechts platziert, so dass die oberen Ränder von Γ_A und Γ_B bündig sind und a in der untersten Zeile sitzt.

Nun werden die Kanten $(p(a), a)$, $(a, r(a))$ gezeichnet.

- Unterfall (d) (siehe Abbildung 4(d), auch hier $u^* = a$):

- $A < 1$: Γ_A wird über dem horizontal gespiegelten Γ_B platziert, so dass der linke Rand von Γ_A eine Einheit links des linken Randes von Γ_B liegt. Wir platzieren u^* in der selben Spalte wie o und der selben Zeile wie $r(a)$.
- $A \geq 1$: Γ_A wird eine Einheit links von der horizontal gespiegelten Einbettung Γ_B platziert, so dass ihre oberen Ränder bündig sind. Danach wird Γ_B soweit nach unten verschoben bis der untere Rand mindestens eine Einheit tiefer liegt, als der untere Rand von Γ_A . Nun wird u^* in der selben Spalte wie o und in der selben Zeile wie $r(a)$ platziert.

Die Kanten (o, u^*) und $(u^*, r(a))$ werden eingezeichnet.

- Im Unterfall (e), Abbildung 4(e), wird o eine Einheit über und eine Einheit links von Γ_B platziert (für $A < 1 \wedge A \geq 1$) und dann die Kante $(a, r(a))$ eingezeichnet.
- Unterfall (f) ist ähnlich wie Unterfall (a), nur dass hier Γ_A wegfällt (siehe Abbildung 4(f)).
- Unterfall (g) ist ähnlich zu (f), aber es wird auch noch Γ_C horizontal gespiegelt (siehe Abbildung 4(g)).

Im Fall 2 wird die Einbettung Γ aus Γ_A , Γ_B und Γ_C folgendermaßen konstruiert (siehe Abbildung 5):

- Die Unterfälle (a) bzw. (e) sind dem Vorgehen in den Unterfällen (a) bzw. (f) aus Fall 1 ähnlich (siehe Abbildung 5(a) und Abbildung 5(e)).
- Im Unterfall (c) wird Γ wie folgt konstruiert (siehe Abbildung 5(c)):
 - $A < 1$: Wir platzieren Γ_A eine Einheit über Γ_C , wobei der linke Rand von Γ_C eine Einheit rechts des linken Randes von Γ_A zu liegen kommt. Der Knoten u wird dann in der selben Spalte wie o und in der selben Zeile wie v platziert.
 - $A \geq 1$: Die um 90° rotierte und dann horizontal gespiegelte Einbettung Γ_A wird eine Einheit links von Γ_C platziert, so dass der obere Rand von Γ_C eine Einheit tiefer als der obere Rand von Γ_A liegt. Dann wird Γ_C nach unten verschoben, bis u^* der tiefste Knoten von Γ ist. Nun platzieren wir u in der selben Spalte wie v und in der selben Zeile wie o .

Dann werden noch die Kanten $(p(u), u)$ und (u, v) eingezeichnet.

- Unterfall (g) wird ähnlich behandelt (siehe Abbildung 5(g)), wie Fall (b) beim Erstellen von Γ_α (siehe Abbildung 6(b)).

- Die Konstruktion von Γ in den Unterfällen (b), (d), (f) und (h) entspricht den Konstruktionen in den Unterfällen (a), (c), (e) und (g), zusätzlich wird aber noch Γ_C horizontal gespiegelt.

3.5 Analyse des Algorithmus *ZeichneBaum*

Theorem 7 (Haupt-Aussage) *Sei T ein Binärbaum mit n Knoten und seien das Seitenverhältnis A und die Konstante ϵ gegeben, so dass $0 < \epsilon < 1$ und $A \in [n^{-\epsilon}, n^\epsilon]$. Dann können wir in $O(n \log n)$ Zeit eine planare, geradlinige Einbettung von T konstruieren, die $O(n)$ Fläche mit Seitenverhältnis A benötigt.*

Um das Theorem zu beweisen, zeigen wir zunächst einige Lemmata.

Lemma 8 (Zulässigkeit) *Wenn der Algorithmus *ZeichneBaum* auf einen Binärbaum T mit Verbindungsknoten u^* angewendet wird, erstellt er eine zulässige Einbettung Γ von T .*

Beweis. Wir beweisen durch Induktion über die Anzahl n der Knoten in T , dass Γ eine zulässige Einbettung ist.

Erinnern wir uns zunächst kurz an die Eigenschaften für Zulässigkeit. Der Verbindungsknoten u^* einer Einbettung Γ liegt entweder am unteren Rand von Γ und ist beliebig weit nach unten verschiebbar (Eigenschaft 2) oder ist gleich dem Wurzelknoten o und liegt in der linken oberen Ecke, wobei dann die erste Zeile und erste Spalte ansonsten frei sind und ist somit beliebig nach oben verschiebbar (Eigenschaften 1 und 3). Nach einer Drehung um 90° und anschließender horizontaler Spiegelung ändert sich im Fall $u^* = o$ nichts, u^* ist links-oben und erste Zeile und Spalte sind ansonsten frei, im Fall $u^* \neq o$ liegt u^* nun am rechten Rand der Einbettung.

Induktions-Anfang ($n = 1$): Γ besteht aus einem Knoten und ist somit eine zulässige Einbettung.

Induktions-Schritt ($n > 1$): Zunächst betrachten wir Fall 1. Nach Induktions-Annahme sind die Einbettungen der partiellen Bäume zulässig.

Aus Abbildung 6 ist ersichtlich, dass Γ_α in allen Fällen die Wurzel u links-oben platziert hat und planar ist. Auch Γ_B hat seine Wurzel $r(a)$ in der linken oberen Ecke (siehe Abbildung 7). Γ_β ist eine zulässige Einbettung mit Verbindungsknoten $p(u)$. Die Kante $(p(u), u)$ ist kreuzungsfrei, da falls $p(u) = r(a)$ der Knoten u in der selben Spalte ($A < 1$) bzw. selben Zeile ($A \geq 1$) liegt und falls $p(u) \neq r(a)$ liegt $p(u)$ am unteren Rand von Γ_β bzw. nach Rotation und horizontaler Spiegelung am rechten Rand. Somit ist auch Γ_B planar.

Nun betrachten wir die sieben Unterfälle von Fall 1 und zeigen, dass Γ jeweils eine zulässige Einbettung von T ist. Die Wurzel o liegt in jedem Unterfall in der linken oberen Ecke (siehe Abbildung 4), somit ist Eigenschaft 1 erfüllt.

- *Unterfall (a)*: Siehe Abbildung 4(a). Γ_A ist eine zulässige Einbettung von T_A , mit Verbindungsknoten $p(a)$. Der Knoten a liegt in der selben Spalte ($A < 1$) bzw. Zeile ($A \geq 1$) wie o . Somit ist die Kante $(p(a), a)$ für $p(a) = o$ kreuzungsfrei. Für $p(a) \neq o$, liegt $p(a)$ am unteren bzw. nach Rotation und horizontaler Spiegelung am rechten Rand und $(p(a), a)$ ist wiederum kreuzungsfrei. Die anderen beiden eingefügten Kanten sind offensichtlich auch kreuzungsfrei. Also ist Γ planar.

Der Verbindungsknoten u^* von Γ ist nach dem Zusammensetzen der unterste Knoten von Γ . Γ_C ist eine zulässige Einbettung mit Wurzel $l(a)$ und $u^* \neq l(a)$, erfüllt also Eigenschaft 2, deshalb lässt sich u^* auch in Γ beliebig weit nach unten verschieben. Somit ist Eigenschaft 2 erfüllt.

Da $u^* \neq o$ ist Eigenschaft 3 nicht anwendbar.

Also ist Γ eine zulässige Einbettung von T .

- *Unterfall (b)*: Siehe Abbildung 4(b). Der Beweis verläuft wie in Unterfall (a), aber diesmal erfüllt Γ_C Eigenschaft 3. Beim Zusammensetzen wird Γ_C horizontal gespiegelt und somit ist u^* wieder der unterste Knoten und lässt sich beliebig weit nach unten verschieben, da er in Γ_C beliebig weit nach oben verschiebbar ist. Somit ist auch hier Eigenschaft 2 für Γ erfüllt.
- *Unterfall (c)*: Siehe Abbildung 4(c). Γ_A ist eine zulässige Einbettung und $p(a)$ ist der Verbindungsknoten von Γ_A . Nach Rotation um 90° und horizontaler Spiegelung ist $p(a)$ auf dem rechten Rand von Γ_A und kann für $A < 1$ aufgrund von Eigenschaft 2 nach rechts bewegt werden, bis er bündig mit dem rechten Rand von Γ_B ist. Somit ist in beiden Fällen die Kante $(p(a), u^*)$ kreuzungsfrei. Auch die Kante $(u^*, r(a))$ ist kreuzungsfrei und u^* liegt alleine in einer Spalte am unteren Rand von Γ , womit Eigenschaft 2 erfüllt ist. Also ist Γ zulässig.
- *Unterfall (d)*: Siehe Abbildung 4(d). Der Verbindungsknoten $p(a)$ der zulässigen Einbettung Γ_A ist gleich der Wurzel o . Somit liegt $p(a)$, nach Eigenschaft 1 und 3, oben links und kein anderer Knoten von T_A liegt in der selben Spalte und Zeile. Damit ist für $A < 1$ und $A \geq 1$ die Kante $(p(a), a)$ kreuzungsfrei und Γ ist eine zulässige Einbettung.
- *Unterfall (e)*: Siehe Abbildung 4(e). Γ ist planar und $u^* = o$ liegt in der linken oberen Ecke alleine in einer Spalte und Zeile, somit ist Eigenschaft 3 erfüllt und Γ ist zulässig.
- *Unterfall (f)*: Aus Abbildung 4(f) ist direkt ersichtlich, dass Γ eine zulässige Einbettung von T ist.

- *Unterfall (g)*: Siehe Abbildung 4(g). Γ_C ist eine zulässige Darstellung mit Verbindungsknoten u^* der gleich der Wurzel $l(a)$ ist. Somit kreuzt kein weiterer Knoten oder weitere Kante aus T_C die Spalte und Zeile von u^* . Die horizontale Spiegelung von Γ_C bringt u^* an den unteren Rand und die Kante (a, u^*) ist kreuzungsfrei. Γ_C erfüllt Eigenschaft 3, also kann u^* nach der horizontalen Spiegelung beliebig nach unten verschoben werden. Somit erfüllt Γ Eigenschaft 2 und ist zulässig.

Mit ähnlichem Vorgehen können wir zeigen, dass Γ auch in Fall 2 eine zulässige Einbettung von T ist. \square

Lemma 9 (Laufzeit) *Gegeben sei ein Binärbaum T mit n Knoten und Verbindungsknoten u^* , der Algorithmus `ZeichneBaum` erstellt eine zulässige Einbettung Γ von T in $O(n \log n)$ Zeit.*

Beweis. Nach Theorem 5 hat jeder partielle Baum, der beim Zerteilen im Algorithmus `ZeichneBaum` erstellt wird, höchstens $2/3 \cdot n$ Knoten. Damit ergibt sich eine Rekursionstiefe von $O(\log n)$. In jeder Rekursionsebene braucht der Algorithmus $O(m)$ Zeit um einen Baum T' mit m Knoten zu zerteilen, Seitenverhältnisse zuzuweisen und die partiellen Bäume zu einer Einbettung Γ' von T' zusammenzusetzen. In jeder Rekursionsebene ist die Gesamtzahl an Knoten in allen Bäumen, die in dieser Ebene bearbeitet werden, höchstens n . Also braucht der Algorithmus pro Rekursionsebene höchstens $O(n)$ Zeit und somit insgesamt $O(n \log n)$ Zeit. \square

Lemma 10 *Sei R ein Rechteck mit Fläche D und Seitenverhältnis A . Sei W die Breite und H die Höhe von R , dann gilt: $W = \sqrt{AD}$ und $H = \sqrt{D/A}$.*

Beweis. Das Seitenverhältnis A ist definiert durch: $A = W/H$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow H = W/A \\ \text{und Fläche } D &= WH = W(W/A) = W^2/A \\ \Rightarrow W &= \sqrt{AD} \\ \Rightarrow H &= W/A = \sqrt{AD}/A = \sqrt{D/A} \end{aligned}$$

\square

Lemma 11 (Fläche) *Sei T ein Binärbaum mit n Knoten und Verbindungsknoten u^* . Sei ϵ eine Konstante, mit $0 < \epsilon < 1$ und A eine Zahl, mit $A \in [n^{-\epsilon}, n^\epsilon]$. Mit T , ϵ und A als Input konstruiert Algorithmus `ZeichneBaum` eine Einbettung Γ von T , die in ein Rechteck R mit $O(n)$ Fläche und Seitenverhältnis A passt.*

Beweis. Sei $D(n)$ die Fläche von R . Wir beweisen durch Induktion über n , dass $\forall n \geq n_0 : D(n) \leq c_1 n - c_2 n^\beta$, wobei n_0, c_1, c_2 und β positive Konstanten sind und $\beta < 1$. Somit gilt auch $D(n) \in O(n)$. Die Beweise für $A < 1$ und $A \geq 1$ sind symmetrisch, wir zeigen nun den Beweis für $A \geq 1$.

Unser Algorithmus zerteilt T in maximal 5 partielle Bäume, im Fall 1 sind das $T_A, T_\beta, T_1, T_2, T_C$ und im Fall 2 sind es T_A, T_B, T_C . Sei T_k einer dieser Bäume, wobei $T_k \neq \emptyset$, sei n_k die Anzahl von Knoten in T_k und $x_k = n_k/n$. Aus Theorem 5 wissen wir, dass $n_k \leq 2/3 \cdot n$ und somit $x_k \leq 2/3$. Wir definieren nun: $P_k = c_1 n - c_2 n^\beta / x_k^{1-\beta}$. Es gilt:

$$P_k \leq c_1 n - c_2 n^\beta / (2/3)^{1-\beta} = c_1 n - c_2 n^\beta (3/2)^{1-\beta} := P' \quad (1)$$

Der Algorithmus *ZeichneBaum* konstruiert eine Einbettung Γ_k von T_k , die nach Induktions-Voraussetzung in ein Rechteck R_k mit Seitenverhältnis A_k und Fläche $D(n_k)$ passt, mit A_k definiert in Abschnitt 3.2 und $D(n_k) \leq c_1 n_k - c_2 n_k^\beta$

$$\begin{aligned} D(n_k) &\leq c_1 n_k - c_2 n_k^\beta = c_1 x_k n - c_2 (x_k n)^\beta \\ &= x_k (c_1 n - c_2 n^\beta / x_k^{1-\beta}) = x_k P_k \\ &\stackrel{(1)}{\leq} x_k P' \end{aligned}$$

Sei W_k die Breite und H_k die Höhe von R_k . In Abhängigkeit von A, P', x_k, n und ϵ stellen sich W_k und H_k folgendermaßen dar:

- Wenn T_k ein kleiner partieller Baum von T ist:

Dann gilt $n_k < (n/A)^{1/(1+\epsilon)}$ und $A_k = 1/n_k^\epsilon$. Für W_k ergibt sich:

$$\begin{aligned} W_k &\stackrel{\text{Lemma 10}}{=} \sqrt{A_k D(n_k)} \\ &\leq \sqrt{(1/n_k^\epsilon)(x_k P')} = \sqrt{(1/n_k^\epsilon)(n_k/n) P'} = \sqrt{n_k^{1-\epsilon} P' / n} \\ &< \sqrt{\left(\frac{n}{A}\right)^{(1-\epsilon)/(1+\epsilon)} \cdot \frac{P'}{n}} = \sqrt{\left(\frac{1}{A}\right)^{(1-\epsilon)/(1+\epsilon)} \cdot \frac{P'}{n^{2\epsilon/(1+\epsilon)}}} \\ &\stackrel{(A \geq 1)}{\leq} \sqrt{\frac{P'}{n^{2\epsilon/(1+\epsilon)}}} \end{aligned}$$

und für H_k :

$$\begin{aligned} H_k &\stackrel{\text{Lemma 10}}{=} \sqrt{D(n_k)/A_k} \\ &\leq \sqrt{x_k P' / (1/n_k^\epsilon)} = \sqrt{(n_k/n) P' n_k^\epsilon} = \sqrt{n_k^{1+\epsilon} P' / n} \\ &< \sqrt{\left(\frac{n}{A}\right)^{(1+\epsilon)/(1+\epsilon)} P' / n} = \sqrt{(n/A) P' / n} = \sqrt{P' / A} \end{aligned}$$

$$1 \frac{n^{(1-\epsilon)}}{n^{(1+\epsilon)}} = n^{\frac{(1-\epsilon)}{(1+\epsilon)} - 1} = n^{\frac{(1-\epsilon)}{(1+\epsilon)} - \frac{(1+\epsilon)}{(1+\epsilon)}} = \frac{1}{n^{2\epsilon/(1+\epsilon)}}$$

- Wenn T_k ein großer partieller Baum von T ist: Dann gilt $A_k = x_k A$ und:

$$\begin{aligned}
W_k &\stackrel{\text{Lemma 10}}{=} \sqrt{A_k D(n_k)} \\
&\leq \sqrt{x_k A \cdot x_k P'} = x_k \sqrt{AP'} \\
H_k &\stackrel{\text{Lemma 10}}{=} \sqrt{D(n_k)/A_k} \\
&\leq \sqrt{x_k P'/(x_k A)} = \sqrt{P'/A}
\end{aligned}$$

Wir berechnen nun die Größe eines Rechtecks R' in das die Einbettung Γ von T , die wir nach dem Zusammensetzen der T_k erhalten, hineinpasst. Beim Zusammensetzen fügen wir höchstens zwei Zeilen und eine Spalte zusätzlich zu den Einbettungen Γ_k hinzu. Die Einbettungen Γ_k der partiellen Bäume werden für $A \geq 1$ alle nebeneinander platziert, somit ergibt sich für die Breite W' und Höhe H' von R' :

$$\begin{aligned}
H' &\leq \max_{T_k \text{ ist partieller Baum von } T} (H_k) + 2 \\
&\leq \sqrt{P'/A} + 2
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
W' &\leq \sum_{T_k \text{ ist großer partieller}} W_k + \left(\sum_{T_k \text{ ist kleiner partieller Baum}} W_k \right) + 1 \\
&\leq \sum_{T_k \text{ ist großer partieller Baum}} x_k \sqrt{AP'} \\
&\quad + \left(\sum_{T_k \text{ ist kleiner partieller Baum}} \sqrt{P'/n^{2\epsilon/(1+\epsilon)}} \right) + 1 \\
&\leq \sqrt{AP'} + 5\sqrt{P'/n^{2\epsilon/(1+\epsilon)}} + 1
\end{aligned}$$

R' hat eventuell noch nicht das gewünschte Seitenverhältnis A , aber wir zeigen nun, dass R' in einem Rechteck R mit Seitenverhältnis A , Breite W , Höhe H und Fläche $D(n)$ enthalten ist.

$$W = \sqrt{AP'} + 5\sqrt{P'/n^{2\epsilon/(1+\epsilon)}} + 1 + 2A$$

und

$$H = \sqrt{P'/A} + 2 + (5/A)\sqrt{P'/n^{2\epsilon/(1+\epsilon)}} + 1/A$$

Es gilt $A \cdot H = W \Leftrightarrow \frac{W}{H} = A$, also hat R das Seitenverhältnis A . Für die Fläche $D(n)$ gilt:

$$D(n) = WH$$

$$\begin{aligned}
&= (\sqrt{AP'} + 5\sqrt{P'/n^{2\epsilon/(1+\epsilon)}} + 1 + 2A) \\
&\quad \cdot (\sqrt{P'/A} + 2 + (5/A)\sqrt{P'/n^{2\epsilon/(1+\epsilon)}} + 1/A) \\
&\leq P' + c_3P'/\sqrt{An^{2\epsilon/(1+\epsilon)}} + c_4\sqrt{AP'} + c_5P'/An^{2\epsilon/(1+\epsilon)} \\
&\quad + c_6\sqrt{P'/n^{2\epsilon/(1+\epsilon)}} + c_7A + c_8 + c_9/A + c_{10}\sqrt{P'/A} \\
&\quad + c_{11}\sqrt{P'/n^{2\epsilon/(1+\epsilon)}/A}
\end{aligned}$$

wobei c_3, c_4, \dots, c_{11} Konstanten sind. Da $1 \leq A \leq n^\epsilon$:

$$\begin{aligned}
D(n) &\leq P' + c_3P'/\sqrt{n^{2\epsilon/(1+\epsilon)}} + c_4\sqrt{n^\epsilon P'} + c_5P'/n^{2\epsilon/(1+\epsilon)} \\
&\quad + c_6\sqrt{P'/n^{2\epsilon/(1+\epsilon)}} + c_7n^\epsilon + c_8 + c_9 + c_{10}\sqrt{P'} + c_{11}\sqrt{P'/n^{2\epsilon/(1+\epsilon)}}
\end{aligned}$$

und $P' < c_1n$

$$\begin{aligned}
D(n) &< P' + c_3c_1n/\sqrt{n^{2\epsilon/(1+\epsilon)}} + c_4\sqrt{n^\epsilon c_1n} + c_5c_1n/n^{2\epsilon/(1+\epsilon)} \\
&\quad + c_6\sqrt{c_1n/n^{2\epsilon/(1+\epsilon)}} + c_7n^\epsilon + c_8 + c_9 + c_{10}\sqrt{c_1n} \\
&\quad + c_{11}\sqrt{c_1n/n^{2\epsilon/(1+\epsilon)}} \\
&= P' + c_3c_1n^{1/(1+\epsilon)} + c_4\sqrt{c_1n}^{(1+\epsilon)/2} + c_5c_1n^{(1-\epsilon)/(1+\epsilon)} \\
&\quad + c_6\sqrt{c_1n}^{(1-\epsilon)/2(1+\epsilon)} + c_7n^\epsilon + c_8 + c_9 + c_{10}\sqrt{c_1n}^{1/2} \\
&\quad + c_{11}\sqrt{c_1n}^{(1-\epsilon)/2(1+\epsilon)}
\end{aligned}$$

Wegen

$$0 < \epsilon < 1 \tag{2}$$

$$(1 - \epsilon)/2(1 + \epsilon) < (1 - \epsilon)/(1 + \epsilon) < 1/(1 + \epsilon) \tag{3}$$

$$\epsilon < (1 + \epsilon)/2 \tag{4}$$

$$1/2 < (1 + \epsilon)/2 \tag{5}$$

gilt

$$D(n) \stackrel{(2)(3)(4)(5)}{\leq} P' + c_{12}n^{1/(1+\epsilon)} + c_{13}n^{(1+\epsilon)/2}$$

für zwei Konstanten c_{12} und c_{13} .

$$P' = c_1n - c_2n^\beta(3/2)^{1-\beta} = c_1n - c_2n^\beta(1 + c_{14})$$

$$\text{wobei für } c_{14} \text{ gilt: } 1 + c_{14} = (3/2)^{1-\beta}$$

Und somit:

$$\begin{aligned}
D(n) &\leq c_1n - c_2n^\beta(1 + c_{14}) + c_{12}n^{1/(1+\epsilon)} + c_{13}n^{(1+\epsilon)/2} \\
&= c_1n - c_2n^\beta - (c_2c_{14}n^\beta - c_{12}n^{1/(1+\epsilon)} - c_{13}n^{(1+\epsilon)/2})
\end{aligned}$$

Für hinreichend große Konstanten n_0 und β , mit

$$1 > \beta > \max\{1/(1 + \epsilon), (1 + \epsilon)/2\}$$

gilt nun:

$$\forall n \geq n_0 : c_2 c_{14} n^\beta - c_{12} n^{1/(1+\epsilon)} - c_{13} n^{(1+\epsilon)/2} \geq 0$$

und somit auch:

$$D(n) \leq c_1 n - c_2 n^\beta$$

Der Beweis für $A < 1$ ist symmetrisch. Ersetzt man A durch $1/A$ und Breite durch Höhe erhält man die gleichen Werte wie oben. \square

Beweis. [Theorem 7]

Wir wählen einen beliebigen Blattknoten von T als Verbindungsknoten aus. Und konstruieren eine Einbettung Γ von T mit dem Algorithmus *Zeichne-Baum* und T , A und ϵ als dessen Eingabe. Nach Lemma 8, Lemma 9 und Lemma 11 ist Γ eine planare, geradelinige Gitter-Einbettung von T die von einem Rechteck R mit $O(n)$ Fläche und Seitenverhältnis A eingeschlossen wird und in Zeit $O(n \log n)$ konstruiert wurde. \square

4 Schlussbemerkung

Wir haben gezeigt, dass eine Einbettung eines Binärbaums in die Ebene, innerhalb eines Rechtecks mit linearer Fläche bezogen auf die Knotenanzahl, auf einem Gitter möglich ist. Außerdem ist diese Einbettung planar und geradlinig und das Seitenverhältnis ist wählbar. Die Konstruktion der Einbettung nimmt $O(n \log n)$ Zeit in Anspruch.

Literatur

- [1] A. Garg and A. Rusu. Straight-line drawings of binary trees with linear area and arbitrary aspect ratio. *Journal of Graph Algorithms and Applications*, 8:135–160, 2004.
- [2] L. Valiant. Universality considerations in VLSI circuits. *IEEE Trans. Comput.*, C-30(2):135–140, 1981.